Cinemàtica

Qüestions

1. **Raoneu si és certa aquesta afirmació: quan un cos es mou amb velocitat constant, el seu moviment és rectilini.**

Si la velocitat és constant ($\vec{v}$ = constant), aleshores el mòdul, la direcció i el sentit del vector velocitat han de ser constants, i això només és possible quan el moviment és rectilini.

2. **Per què un moviment uniforme no es pot iniciar a partir del repòs? Raoneu la resposta.**

Un moviment és uniforme quan la velocitat es manté constant al llarg del temps. Per tant, no pot iniciar-se a partir del repòs, ja que necessita una acceleració.

3. **Quina característica distingeix un moviment harmònic d'un moviment vibratori qualsevol?**

Un moviment vibratori qualsevol és aquell moviment periòdic en el qual el mòbil es mou al voltant d'una posició d'equilibri i repeteix una vegada i una altra la seva trajectòria. El moviment harmònic és el més senzill que es dóna a la natura i resulta de projectar un moviment circular uniforme sobre un eix que passi pel centre de la circumferència i que estigui contingut en el pla que la defineix.

4. **Quin és l'angle de desfasament que hi ha entre la velocitat i l'acceleració del moviment harmònic simple? Raoneu la resposta.**

Si tenim en compte que la velocitat i l'acceleració es poden expressar per les equacions,

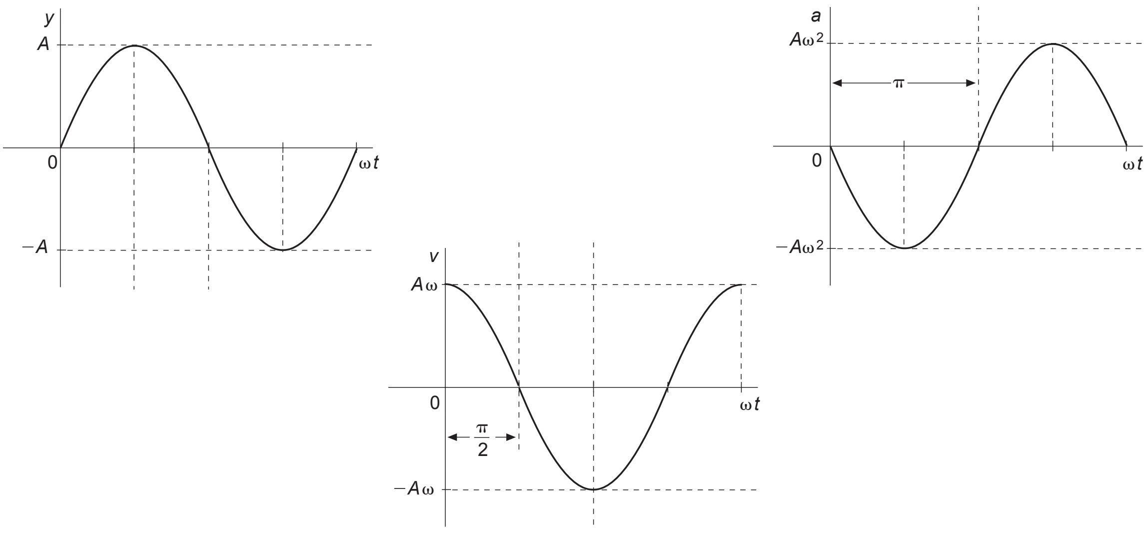
$$v(t) = A\,\omega \cos \omega\, t = A\,\omega \sin\left(\omega\, t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a(t) = -A\,\omega^2 \sin \omega\, t = A\,\omega^2 \sin(\omega\, t + \pi)$$

aleshores podem comprovar que l'angle de desfasament $\Delta\varphi$ és:

$$\Delta\varphi = (\omega\, t + \pi) - \left(\omega\, t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Això també es pot comprovar si observem els gràfics *v-t* i *a-t* que s'obtenen en representar les funcions anteriors.



5. La freqüència angular d'un oscil·lador harmònic és el triple que la d'un altre. Digueu quina relació hi ha entre:

ω_1

$\omega_1 = 3\,\omega_1$

a) **Els períodes.**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\pi}{T_1} \\ \omega_2 &= \frac{2\pi}{T_2} = 3\,\omega_1 \end{aligned}\right\}$$

$$3\left(\frac{2\pi}{T_1}\right) = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow 3\,T_2 = T_1$$

b) **Les freqüències.**

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi\, f_1 \\ \omega_2 &= 2\pi\, f_2 = 3\,\omega_1 \end{aligned}\right\}$$

$$3\,(2\pi\, f_1) = 2\pi\, f_2 \rightarrow f_2 = 3\,f_1$$

c) **Les amplituds.**

L'amplitud d'un oscil·lador harmònic no està relacionada amb la freqüència angular, ja que el seu valor depèn de les condicions inicials en què se n'estudia el moviment.

Raoneu les respostes.

6. A la figura 2.42 hi ha representats tres moviments harmònics simples. Escriu-ne les equacions del moviment i calculeu el desfasament entre ells.

$$1\text{:}\;\; x = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T}\, t$$

$$2\text{:}\;\; x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3\text{:}\;\; x = A \sin\,(\omega t + \pi) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \pi\right)$$

Càlcul dels angles de desfasament $\Delta\varphi$:

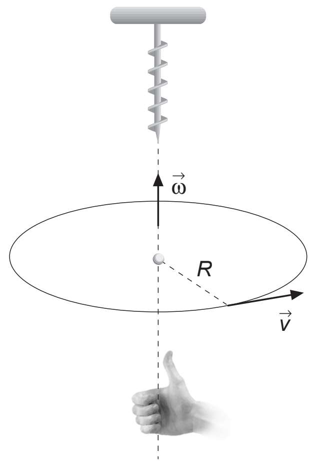
Entre 1 i 2: $\Delta\varphi = \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \omega t = \frac{\pi}{2}$

Entre 1 i 3: $\Delta\varphi = (\omega t + \pi) - \omega t = \pi$

Entre 2 i 3: $\Delta\varphi = (\omega t + \pi) - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

També es pot comprovar si s'observen els gràfics on representem les tres funcions harmòniques.

7. **Com es pot representar vectorialment el moviment de la minutera d'un rellotge? Quin tipus de vector és?**



Amb un vector axial que, en aquest cas, és el vector velocitat angular $\vec{\omega}$.

8. **Com són l'acceleració angular, l'acceleració normal i l'acceleració tangencial:**

a) **En el moviment rectilini uniformement accelerat?**

En el MRU, com que la trajectòria és una recta, l'acceleració correspon a l'acceleració tangencial.

b) **I en el moviment circular uniforme?**

En el MCU, la velocitat angular és constant. Per tant, l'acceleració angular és nul·la. La velocitat lineal també és constant i, així, el component tangencial de l'acceleració també és constant. Ara bé, en el MCU hi ha variació en la direcció de la velocitat i, per tant, el component normal de l'acceleració val $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

9. **Com estan relacionats els temps que triguen a girar dues partícules si una té una velocitat angular doble de la de l'altra i descriu la meitat de l'angle?**

Si suposem que t_1 és el temps que la partícula triga a girar un angle φ_1 quan va a velocitat ω_1 i t_2 és el temps que triga la partícula a girar un angle φ_2 quan va a velocitat angular ω_2. Segons l'enunciat, tenim que $\omega_2 = 2\,\omega_1$, $\varphi_2 = \dfrac{1}{2}\,\varphi_1$. Considerem que la partícula gira amb acceleració angular constant partint del repòs. Si tenim en compte l'equació del moviment i l'equació de la velocitat del MCUA, trobem que:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + \omega_0\,\Delta t + \dfrac{1}{2}\,\alpha\,\Delta t^2 \;\rightarrow\; \varphi = \dfrac{1}{2}\,\alpha\,t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha\,\Delta t \;\rightarrow\; \omega = \alpha\,t \end{array}\right\}$$

Aïllem α i la substituïm en l'equació del moviment:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \;\rightarrow\; \varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\omega}{t}\,t^2 \;\rightarrow\; \varphi = \frac{1}{2}\,\omega\,t \;\rightarrow\; t = \frac{2\varphi}{\omega}$$

Apliquem aquesta última expressió a les dues situacions de l'enunciat, i relacionem els temps:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{2\varphi_1}{\omega_1} \\ t_2 = \dfrac{2\varphi_2}{\omega_2} \end{array}\right\} \;\frac{t_1}{t_2} = \frac{\dfrac{2\varphi_1}{\omega_1}}{\dfrac{2\varphi_2}{\omega_2}} \;\rightarrow\; \frac{t_1}{t_2} = \frac{\varphi_1\,\omega_2}{\varphi_2\,\omega_1} \;\rightarrow\; \frac{t_1}{t_2} = \frac{\varphi_1\,2\omega_1}{\dfrac{1}{2}\,\varphi_1\,\omega_1} = 4 \;\rightarrow\; t_1 = 4\,t_2$$

Arribem al mateix resultat si considerem que el moviment és un MCU.

Problemes

1. **Trobeu l'equació de la trajectòria d'un mòbil el vector de posició del qual ve donat per la funció $\vec{r} = (2\,t + 1)\,\vec{i} + (3\,t - 3)\,\vec{j}$ en unitats del SI.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\,t + 1 \\ y = 3\,t - 3 \end{array}\right\} \quad x = 2\,t + 1 \;\rightarrow\; t = \frac{x - 1}{2}$$

$$y = 3\left(\frac{x-1}{2}\right) - 3 = \frac{3\,x}{2} - \frac{3}{2} - 3 \;\rightarrow\; y = \frac{3}{2}\,x - \frac{9}{2}$$

2. **Trobeu l'equació de la trajectòria del mòbil el vector de posició del qual ve donat per la funció $\vec{r} = (2\,t + 2\,,\, 2\,t + 4\,t^2)$ en unitats del SI.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\,t + 2 \\ y = 2\,t + 4\,t^2 \end{array}\right\} \quad x = 2\,t + 2 \;\rightarrow\; t = \frac{x - 2}{2}$$

$$y = \cancel{2}\left(\frac{x-2}{\cancel{2}}\right) + \cancel{4}\left(\frac{x-2}{\cancel{2}}\right)^2 \;\rightarrow\; y = x - 2 + x^2 - 4\,x + 4 \;\rightarrow\; y = x^2 - 3\,x + 2$$

3. **L'equació del moviment d'un mòbil és**

$$\vec{r}(t) = (3\,t^2 - 6\,t)\,\vec{i} + (t^3 - 4\,t^2 + 2)\,\vec{j}$$

Si mesurem el desplaçament en *m* i el temps en *s*, calculeu:

a) **El desplaçament entre els instants $t = 0$ i $t = 2$ s.**

$$\vec{r}(0) = (3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0)\,\vec{i} + (0^3 - 4 \cdot 0^2 + 2)\,\vec{j} = 2\,\vec{j}$$

$$\vec{r}(2) = (3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2)\,\vec{i} + (2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2)\,\vec{j} = -6\,\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0) = -6\,\vec{j} - 2\,\vec{j} = -8\,\vec{j}$$

b) **La velocitat mitjana entre aquests dos instants.**

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{-8\,\vec{j}}{2} = -4\,\vec{j}$$

c) **La velocitat instantània per a $t = 1$ s.**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6\,t - 6)\,\vec{i} + (3\,t^2 - 8\,t)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}\,(1) = (6 \cdot 1 - 6)\,\vec{i} + (3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1)\,\vec{j} = -5\,\vec{j}$$

d) **L'acceleració mitjana entre $t = 0$ i $t = 2$ s.**

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(0) = (6 \cdot 0 - 6)\,\vec{i} + (3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0)\,\vec{j} = -6\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(2) = (6 \cdot 2 - 6)\,\vec{i} + (3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2)\,\vec{j} = 6\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(2) \cdot \vec{v}(0)}{t(2) - t(0)} = \frac{6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - (-6\,\vec{i})}{2} = \frac{12\,\vec{i} - 4\,\vec{j}}{2} = 6\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$$

e) **L'acceleració instantània per a $t = 1$ s.**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\,\vec{i} + (6\,t - 8)\,\vec{j}$$

$$\vec{a}(1) = 6\,\vec{i} + (6 \cdot 1 - 8)\,\vec{j} = 6\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$$

4. **L'equació del moviment d'un mòbil és**

$$\vec{r}(t) = (2\,t^2 + 1)\,\vec{i} + (2\,t^3 + 5\,t)\,\vec{j}$$

Si mesurem el desplaçament en *m* i el temps en *s,* calculeu:

a) **El desplaçament entre els instants $t = 0$ i $t = 2$ s.**

$\vec{r}(0) = (2 \cdot 0^2 + 1)\,\vec{i} + (2 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0)\,\vec{j} = \vec{i}$

$\vec{r}(2) = (2 \cdot 2^2 + 1)\,\vec{i} + (2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2)\,\vec{j} = 9\,\vec{i} + 26\,\vec{j}$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(1) = 9\,\vec{i} + 26\,\vec{j} - \vec{i} = 8\,\vec{i} + 26\,\vec{j}$

b) **La velocitat mitjana entre aquests dos instants.**

$$\vec{u}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{8\,\vec{i} + 26\,\vec{j}}{2} = 4\,\vec{i} + 13\,\vec{j}$$

c) **La velocitat instantània per a $t = 1$ s.**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4\,t\,\vec{i} + (6\,t^2 + 5)\,\vec{j}$$

$\vec{v}(1) = 4 \cdot 1\,\vec{i} + (6 \cdot 1^2 + 5)\,\vec{j} = 4\,\vec{i} + 11\,\vec{j}$

d) **L'acceleració mitjana entre $t = 0$ i $t = 2$ s.**

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\vec{v}(0) = 4 \cdot 0\,\vec{i} + (6 \cdot 0^2 + 5)\,\vec{j} = 5\,\vec{j}$

$\vec{v}(2) = 4 \cdot 2\,\vec{i} + (6 \cdot 2^2 + 5)\,\vec{j} = 8\,\vec{i} + 29\,\vec{j}$

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(2) - \vec{v}(0)}{t(2) - t(0)} = \frac{8\,\vec{i} + 29\,\vec{j} - 5\,\vec{j}}{2} = 4\,\vec{i} + 12\,\vec{j}$$

e) **L'acceleració instantània per a $t = 1$ s.**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\,\vec{i} + 12\,t\,\vec{j}$$

$\vec{a}(1) = 4\,\vec{i} + 12 \cdot 1\,\vec{j} = 4\,\vec{i} + 12\,\vec{j}$

f) **Es tracta d'un moviment uniformement accelerat? Raoneu-ho.**

No és un moviment uniformement accelerat, ja que l'acceleració és una funció del temps:
$\vec{a}(t) = 4\,\vec{i} + 12 \cdot t\,\vec{j}$

5. **Una partícula descriu la trajectòria donada per l'equació del moviment $\vec{r} = (4\,t^2 + 2\ ,\ 2 + t^2)$, expressada en unitats del SI. Calculeu, per a $t = 3$ s, el vector de posició, el vector velocitat i el vector acceleració. Es tracta d'un moviment amb acceleració constant? Raoneu-ho.**

$\vec{r}(t) = (4\,t^2 + 2\ ,\ 2 + t^2)$

$\vec{r}(3) = (4 \cdot 3^2 + 2\ ,\ 2 + 3^2) = (38\ ,\ 11)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8\,t\ ,\ 2\,t) \rightarrow \vec{v}(3) = (8 \cdot 3\ ,\ 2 \cdot 3) = (24\ ,\ 6)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (8\ ,\ 2) \rightarrow \vec{a}(3) = (8\ ,\ 2)$$

És un moviment amb acceleració constant, ja que l'acceleració no depèn del temps: $\vec{a}(t) = (8\ ,\ 2)$.

6. **Una partícula descriu el moviment donat per l'equació $\vec{r}(t) = (t^2 - 5t\ ,\ t^2 - 4)$, expressat en unitats del SI. Calculeu, per a $t = 2$ s, el mòdul del vector de posició, el mòdul de la velocitat i el mòdul de l'acceleració, i raoneu si l'acceleració és constant o variable.**

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 5t\ ,\ t^2 - 4)$$

$$\vec{r}(2) = (2^2 - 5 \cdot 2\ ,\ 2^2 - 4) = (-6\ ,\ 0) \rightarrow r(2) = \sqrt{(-6)^2} = 6 \text{ m}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t - 5\ ,\ 2t) \rightarrow \vec{v}(2) = (2 \cdot 2 - 5\ ,\ 2 \cdot 2) = (-1\ ,\ 4) \rightarrow$$

$$\rightarrow v(2) = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4{,}12 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2\ ,\ 2) \rightarrow \vec{a}(2) = (2\ ,\ 2) \rightarrow a(2) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}83 \text{ m/s}^2$$

L'acceleració és constant ja que no depèn del temps.

7. **L'abscissa d'un mòbil que es desplaça sobre l'eix *OX* és $x = \dfrac{t^3}{2}$ m. Si el temps, *t*, ve donat en s, calculeu:**

a) **La posició i l'acceleració en l'instant en què la seva velocitat és de 6 m/s.**

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{2}$$

$$\text{Si } v = 6 \rightarrow \frac{3t^2}{2} = 6 \rightarrow t = \sqrt{\frac{6 \cdot 2}{3}} = 2 \text{ s}$$

$$\text{Si } t = 2 \text{ s} \rightarrow x = \frac{2^3}{2} = 4 \text{ m}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{6t}{2} = 3t$$

$$\text{Si } t = 2 \text{ s} \rightarrow a = 3 \cdot 2 = 6 \text{ m/s}^2$$

b) **La velocitat i l'acceleració mitjanes entre l'instant $t = 0$ i l'instant de temps calculat en l'apartat anterior.**

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \text{ m} \\ x(2) = 4 \text{ m} \\ v(0) = 0 \text{ m} \\ v(2) = 6 \text{ m/s} \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_m = \dfrac{x(2) - x(0)}{2} = \dfrac{4 - 0}{2} = 2 \text{ m/s} \\[2ex] a_m = \dfrac{v(2) - v(0)}{2} = \dfrac{6 - 0}{2} = 3 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

8. **La velocitat d'una partícula ve donada per la funció $\vec{v} = (2\,t^2 - 1\ ,\ -t)$ en unitats del SI. Si en l'instant inicial la partícula es troba en la posició (10 , 0) m, calculeu:**

$$\vec{v} = (2\,t^2 - 1\ ,\ -t)$$

$$\vec{r}(0) = (10\ ,\ 0)$$

a) **El vector de posició.**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\,dt \rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (2t^2 - 1\ ,\ -t)\,dt \rightarrow$$

$$\rightarrow [\vec{r}]_{(10\ ,\ 0)}^{\vec{r}} = \left[\frac{2t^3}{3} - t\ ,\ -\frac{t^2}{2}\right]_0^t \rightarrow \vec{r} - (10\ ,\ 0) = \left(\frac{2t^3}{3} - t\ ,\ -\frac{t^2}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{r} = \left(\frac{2t^3}{3} - t\ ,\ \frac{-t^2}{2}\right) + (10\ ,\ 0) \rightarrow \vec{r} = \left(\frac{2t^3}{3} - t + 10\ ,\ \frac{-t^2}{2}\right) \text{ m}$$

b) **L'acceleració.**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (4t\ ,\ -1)\ \text{m/s}^2$$

9. En un cert instant, la velocitat d'un mòbil és $\vec{v} = 5\,\vec{i} - 12\,\vec{j}$, i l'acceleració $\vec{a} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ en unitats del SI. Calculeu els components tangencial i normal de l'acceleració en aquest instant.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = 5\,\vec{i} - 12\,\vec{j}\\ \vec{a} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}\end{array}\right\}$$

$$v = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13\ \text{m/s}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{5\,\vec{i} - 12\,\vec{j}}{13} = 0{,}38\,\vec{i} - 0{,}92\,\vec{j}$$

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{u}_t = (3\,\vec{i} - 2\,\vec{j})\cdot(0{,}38\,\vec{i} - 0{,}92\,\vec{j}) = 3\cdot 0{,}38 + (-2)\cdot(-0{,}92) = 3\ \text{m/s}^2$$

$$a_T = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = 3{,}60\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{a}_T = \vec{a}_n + \vec{a}_t \rightarrow a_T = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \rightarrow a_n = \sqrt{a_T^2 - a_t^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow a_n = \sqrt{3{,}60^2 + 3^2} = \sqrt{4} = 2\ \text{m/s}^2$$

10. Una partícula descriu una trajectòria donada pel vector de posició $\vec{r} = (t^2\ ,\ 2t)$ en unitats del SI. Quan la partícula passa per la posició (4 , 4), determineu:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} = (t^2\ ,\ 2t)\\ \vec{r} = (4\ ,\ 4)\end{array}\right\}\quad (4\ ,\ 4) = (t^2\ ,\ 2t) \rightarrow t = 2\ \text{s}$$

a) **La velocitat.**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t\ ,\ 2) \rightarrow \vec{v}(2) = (2\cdot 2\ ,\ 2) = (4\ ,\ 2)\ \text{m/s}$$

b) **L'acceleració.**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2\ ,\ 0) \rightarrow \vec{a}(2) = (2\ ,\ 0)\ \text{m/s}^2$$

c) **Els components intrínsecs de l'acceleració.**

$$v = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}47\ \text{m/s}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(4\ ,\ 2)}{4{,}47} = (0{,}89\ ,\ 0{,}45)$$

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{u}_t = (2\ ,\ 0)\cdot(0{,}89\ ,\ 0{,}45) = 2\cdot 0{,}89 + 0\cdot 0{,}45 = 1{,}79\ \text{m/s}^2$$

$$a_T = \sqrt{2^2} = 2\ \text{m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a_T^2 - a_t^2} = \sqrt{2^2 - 1{,}79^2} = 0{,}89\ \text{m/s}^2$$

d) **El radi de curvatura.**

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4{,}47^2}{0{,}89} = 22{,}36\ \text{m}$$

11. **L'equació del moviment d'un mòbil és**

$$\vec{r}(t) = (2\,t^3 + 3\ ,\ 3\,t^3 - 2)$$

expressat en unitats del SI. Calculeu en l'instant de temps $t = 1$ s:

a) **El mòdul del vector acceleració.**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6\,t^2\ ,\ 9\,t^2)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (12\,t\ ,\ 18\,t)$$

$$\vec{a}(1) = (12\ ,\ 18)$$

$$a = \sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{468} = 21{,}63 \text{ m/s}^2$$

b) **El component tangencial de l'acceleració.**

$$v(t) = \sqrt{(6\,t^2)^2 + (9\,t^2)^2} = \sqrt{36\,t^4 + 81\,t^4} = \sqrt{117\,t^4} = 10{,}817\,t^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 21{,}63\ t$$

$$a_t(1) = 21{,}63 \text{ m/s}^2$$

c) **El component normal de l'acceleració.**

$$a_n = \sqrt{a_T^2 - a_t^2} = \sqrt{21{,}63^2 - 21{,}63^2} = 0$$

12. **La velocitat d'un mòbil és $\vec{v} = (2\,t^2 - 1\ ,\ t^2)$, expressada en unitats del SI. Calculeu el mòdul de l'acceleració i els seus components intrínsecs en l'instant de temps $t = 2$ s.**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (4\,t\ ,\ 2\,t) \rightarrow \vec{a}(2) = (4 \cdot 2\ ,\ 2 \cdot 2) = (8\ ,\ 4)$$

$$a = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 8{,}94 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v}(2) = (2 \cdot 2^2 - 1\ ,\ 2^2) = (7\ ,\ 4)$$

$$v = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} = 8{,}06 \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(7\ ,\ 4)}{8{,}06} = (0{,}87\ ,\ 0{,}50)$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = (8\ ,\ 4) \cdot (0{,}87\ ,\ 0{,}50) = 8 \cdot 0{,}87 + 4 \cdot 0{,}50 = 8{,}93 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a_T^2 - a_t^2} = \sqrt{8{,}94^2 - 8{,}93^2} = 0{,}41 \text{ m/s}^2$$

13. **Un oscil·lador harmònic d'amplitud *A* té una freqüència angular ω.**

a) **Quina és la fase inicial si es comença a comptar el temps quan l'elongació del mòbil és la meitat de l'amplitud?**

$$y(t) = A \sin(\omega\,t + \varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \frac{A}{2} \\ y(0) &= A \sin\varphi \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{A}{2} = A \sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = 0{,}5 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) **I si és la quarta part?**

$$\frac{A}{4} = A \sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{4} \rightarrow \varphi = 14{,}48° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = 0{,}2527 \text{ rad}$$

14. **Un oscil·lador harmònic comença el seu moviment des d'un extrem a 10 cm del punt d'equilibri i triga 0,25 s a arribar al centre. Calculeu:**

a) **El període del moviment.**

$T = 4 \cdot 0{,}25 = 1$ s

b) **El nombre d'oscil·lacions que fa en 1 min.**

$$f = \frac{1}{T} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 60 \text{ min}^{-1}$$

c) **La pulsació.**

$\omega = 2\pi f = 2\pi$ rad/s

d) **La posició quan han passat 0,5 s de l'inici del moviment.**

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) = 0{,}1 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ t = 0{,}5 \text{ s} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow x = 0{,}1 \sin\left(2\pi \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1 \text{ m}$$

15. **Una partícula vibra amb una velocitat màxima de 20 m/s. Calculeu la freqüència i l'acceleració màxima si l'amplitud d'aquest moviment és de 10 cm.**

$v_m = 20$ m/s

$A = 10$ cm $= 0{,}1$ m

$$v_m = A\omega \rightarrow \omega = \frac{v_m}{A} = \frac{20}{0{,}1} = 200 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200}{2\pi} = 31{,}83 \text{ Hz}$$

$a = -\omega^2 A = -200^2 \cdot 0{,}1 = -4\,000$ m/s^2

16. **Escriviu l'equació del moviment harmònic simple d'un mòbil si la seva amplitud és de 15 cm, la seva freqüència val 4 Hz i en l'instant inicial el mòbil es troba en el punt mitjà de la seva amplitud.**

$$\left.\begin{array}{l} A = 15 \text{ cm} = 0{,}15 \text{ m} \\ f = 4 \text{ Hz} \\ t_0 = 0 \rightarrow x = \dfrac{0{,}15}{2} = 0{,}075 \text{ m} \end{array}\right\}$$

$x = A \sin(\omega t + \varphi)$

$\omega = 2\pi f \rightarrow f = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ rad/s

$$0{,}075 = 0{,}15 \sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = \frac{0{,}075}{0{,}15} = 0{,}5 \text{ m} \rightarrow \varphi = 30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$x = 0{,}15 \sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

17. Un cos vibra amb una amplitud de 4 cm i una freqüència de 50 Hz. Trobeu:

a) **La velocitat màxima de la vibració.**

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$ rad/s

$V_{\text{màx}} = A\,\omega = 0{,}04 \cdot 100\pi = 4\pi = 12{,}57$ m/s

b) **La velocitat quan l'elongació val 1 cm.**

$v = A\,\omega \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow y = 0$

$x = A \sin(\omega t + \varphi)$

$x = 0{,}04 \sin(100\pi t + \varphi) = 0{,}04 \sin(100\pi t)$

$$0{,}01 = 0{,}04 \sin(100\pi t) \rightarrow \frac{0{,}01}{0{,}04} = \sin(100\pi t) \rightarrow 0{,}25 = \sin(100\pi t) \rightarrow$$

$$\rightarrow 14{,}48 \text{ rad} = 100\pi t \rightarrow t = \frac{14{,}48}{100\pi} = 0{,}046 \text{ s}$$

$v = 0{,}04 \cdot 100\pi \cdot \cos(100\pi \cdot 0{,}046) = 12{,}16$ m/s

c) **El nombre de vibracions en 1 min.**

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 3\,000 \text{ vibracions/min}$$

18. Quina és l'acceleració centrípeta d'un pilot del Gran Premi de Catalunya que traça una corba de 50 m de radi a una velocitat de 180 km/h?

$$180 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow a_n = \frac{50^2}{50} = 50 \text{ m/s}^2$$

19. El moviment d'una partícula ve donat per l'equació $x = 8 \sin \frac{\pi}{2} t$, en cm. Calculeu:

a) **L'amplitud del moviment.**

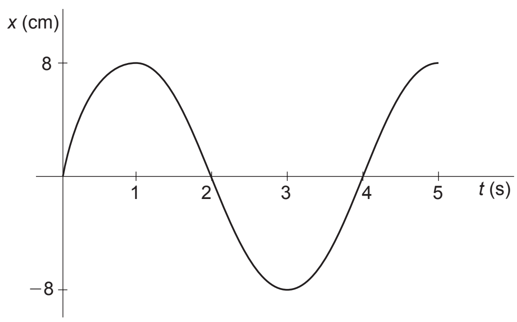
$A = 8$ cm

b) **El període.**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = 4 \text{ s}$$

c) **La posició de la partícula en els instants de temps $t = 0$, $t = 1$ s, $t = 2$ s, $t = 3$ s, $t = 4$ s i $t = 5$ s, i representeu-les en un gràfic.**

t (s)	x (cm)
0	0
1	8
2	0
3	−8
4	0
5	8



20. **Un ciclista s'entrena donant voltes amb la bicicleta en una pista circular de 50 m de radi a un ritme de 5 voltes cada 2 min i 37 s. Calculeu:**

a) **La velocitat angular.**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$2 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 120 \text{ s} + 37 \text{ s} = 157 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{5 \cancel{\text{voltes}}}{157 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{volta}}} = 0{,}20 \text{ rad/s}$$

b) **La velocitat lineal.**

$$v = \omega \cdot r = 0{,}20 \cdot 50 = 10 \text{ m/s}$$

c) **L'acceleració centrípeta.**

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{50} = 2 \text{ m/s}^2$$

21. **Una partícula descriu una trajectòria circular segons l'equació $\omega = 2t^2 - 3t + 2$ en unitats del SI. Si per a $t = 5$ s, ha recorregut un angle de 20 rad, calculeu l'angle per a $t = 10$ s.**

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 2t^2 - 3t + 2 \\ t = 5 \text{ s} \rightarrow \varphi = 20 \text{ rad} \end{array}\right\}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow d\varphi = \omega\, dt \rightarrow \int_{20}^{\varphi} d\varphi = \int_{5}^{10} \omega\, dt \rightarrow \int_{20}^{\varphi} d\varphi = \int_{5}^{10} (2t^2 - 3t + 2)\, dt \rightarrow$$

$$\rightarrow [\varphi]_{20}^{\varphi} = \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right]_5^{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi - 20 = \left(\frac{2 \cdot 10^3}{3} - \frac{3 \cdot 10^2}{2} + 2 \cdot 10\right) - \left(\frac{2 \cdot 5^3}{3} - \frac{3 \cdot 5^2}{2} + 2 \cdot 5\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi - 20 = 480{,}83 \rightarrow \varphi = 480{,}83 + 20 = 500{,}83 \text{ rad}$$

22. **Un mòbil descriu una circumferència de 20 cm de radi. Partint del repòs, es mou amb una acceleració angular constant i, quan han passat 5 s, la seva velocitat angular és de 300 rpm. Calculeu, per a aquest temps, la velocitat lineal, l'acceleració angular, l'acceleració tangencial, l'acceleració normal, l'acceleració total, l'espai recorregut i l'angle girat.**

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \Delta t + \dfrac{1}{2} \alpha \Delta t \\ \omega = \omega_0 + \alpha \Delta t \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \dfrac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega = \alpha t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} s = \varphi r \\ v = \omega r \\ a_t = \alpha r \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{v^2}{r} \\ a_T = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} s = \dfrac{1}{2} a_t t^2 \\ v = a_t t \end{array}\right\}$$

$$300 \text{ rpm} = 300 \frac{\cancel{\text{voltes}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{volta}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 31{,}42 \text{ rad/s}$$

$$v = \omega r = 31{,}42 \cdot 0{,}2 = 6{,}28 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{31{,}42}{5} = 6{,}28 \text{ rad/s}^2$$

$$a_t = \alpha r \rightarrow a_t = 6{,}28 \cdot 0{,}2 = 1{,}26 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{6{,}28^2}{0{,}2^2} = 197{,}19 \text{ m/s}^2$$

$$a_T = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{197{,}19^2 + 1{,}26^2} = 197{,}20 \text{ m/s}^2$$

$$s = \frac{1}{2} a_t t^2 \rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot 1{,}26 \cdot 5^2 = 15{,}75 \text{ m}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha t^2 \rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 6{,}28 \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ rad}$$

23. **Una partícula descriu una circumferència de 10 cm de radi. Si parteix del repòs i es mou amb una acceleració angular de 0,2 rad/s^2, calculeu, al cap de 20 s:**

a) **L'acceleració normal.**

$$\omega = \alpha t = 0{,}2 \cdot 20 = 4 \text{ rad/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \rightarrow a_n = 4^2 \cdot 0{,}1 = 16 \text{ m/s}^2$$

b) **L'acceleració tangencial.**

$$a_t = \alpha r = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02 \text{ m/s}^2$$

c) **L'acceleració total.**

$$a_T = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1{,}6^2 + 0{,}02^2} = 1{,}60 \text{ m/s}^2$$

d) **La longitud d'arc recorreguda.**

$$s = \frac{1}{2} a_t t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 \cdot 20^2 = 4 \text{ m}$$

24. **Un automòbil circula a 80 km/h, frena i s'atura en 10 s. Calculeu:**

$$80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 22{,}22 \text{ m/s}$$

$v = 0$; $t = 10$ s; $r = 25$ cm $= 0{,}25$ m

a) **Les voltes que han donat les rodes si tenen un diàmetre de 50 cm.**

$$a_t = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 22{,}22}{10} = -2{,}22 \text{ m/s}^2$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \rightarrow s = 22{,}22 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}22) \cdot 10^2 = 111{,}2 \text{ m}$$

$$s = \varphi r \rightarrow \varphi = \frac{s}{r} = \frac{111{,}2}{0{,}25} = 444{,}8 \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \cancel{\text{rad}}} = 70{,}79 \text{ voltes}$$

b) **L'acceleració angular de les rodes.**

$$a_t = \alpha r \rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{-2{,}22}{0{,}25} = -8{,}88 \text{ rad/s}^2$$

25. **Un mòbil descriu una corba amb acceleració tangencial constant de 2 m/s². Si el radi de la corba és de 40 m i la velocitat del mòbil és de 80 km/h, a quina acceleració total està sotmès?**

80 km/h = 22,22 m/s

$a_t = 2 \text{ m/s}^2$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{22{,}22^2}{40} = 12{,}34 \text{ m/s}^2$$

$$a_T = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{12{,}34^2 + 2^2} = 12{,}51 \text{ m/s}^2$$

26. **Una roda gira a 60 rpm i en 5 s té una velocitat angular de 40 rad/s. Calculeu quantes voltes ha donat si suposem que l'acceleració angular és constant.**

$$60 \text{ rpm} = 60 \frac{\text{voltes}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 6{,}28 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{40 - 6{,}28}{5} = 6{,}74 \text{ rad/s}^2$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 6{,}28 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6{,}74 \cdot 5^2 = 115{,}65 \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \cancel{\text{rad}}} = 18{,}41 \text{ voltes}$$

27. **Un aprenent d'astronauta gira amb una velocitat angular ω i experimenta una acceleració centrípeta de 2 g. Calculeu la velocitat angular i la freqüència de gir si el radi del dispositiu giratori és de 2 m i *g* val 9,8 m/s².**

$a_n = 2 \text{ g}$

$r = 2 \text{ m}$

$$a_n = \omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_n}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8}{2}} = \sqrt{9{,}8} = 3{,}13 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}13}{2\pi} = 0{,}5 \text{ s}^{-1}$$

28. **Una partícula que parteix del repòs descriu un moviment circular uniformement accelerat. Calculeu l'angle que ha girat en el moment en què el mòdul de l'acceleració tangencial és el doble que el mòdul de l'acceleració normal.**

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \alpha t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a_t = \alpha r \\ a_n = \omega^2 r \end{array}\right\}$$

$a_t = 2 a_n$

$a_t = 2\omega^2 r = \alpha r \rightarrow \alpha = 2\omega^2$

$$\omega = \alpha t \rightarrow \omega = 2\omega^2 t \rightarrow 1 = 2\omega t \rightarrow \omega t = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\omega^2 t^2 \rightarrow \varphi = \omega^2 t^2 \rightarrow \varphi = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \varphi = 0{,}25 \text{ rad}$$

29. **Quina velocitat angular s'ha de comunicar a una estació espacial de forma anular de 60 m de diàmetre per tal de crear una gravetat artificial a la perifèria igual a la gravetat a la superfície terrestre?**

$r = 30\text{ m}$

$$a_n = g \rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = g \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{30}} = 0{,}57\text{ rad/s}$$

30. **Tres ciclistes, *A, B* i *C,* descriuen una corba circular de 20 m de radi. Calculeu l'acceleració total de cada ciclista en un instant en què el mòdul de la seva velocitat és de 10 m/s, si sabem que:**

a) **El ciclista *A* conserva una velocitat de mòdul constant.**

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{20} = 5\text{ m/s}^2 \rightarrow \vec{a}_T = 5\,\vec{u}_n$$

b) **El ciclista *B* accelera uniformement i la seva velocitat passa de 9,5 m/s a 10,5 m/s en 0,5 s.**

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{10^2}{20} = 5\text{ m/s}^2 \\[2ex] a_t = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{10 \cdot 5 - 9{,}5}{0{,}5} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2\text{ m/s}^2 \end{array}\right\} \quad \vec{a}_T = 5\,\vec{u}_n + 2\,\vec{u}_t$$

c) **El ciclista *C* frena uniformement d'11 m/s a 9 m/s en un temps de 0,5 s.**

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{10^2}{20} = 5\text{ m/s}^2 \\[2ex] a_t = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{9 - 11}{0{,}5} = -\dfrac{2}{0{,}5} = -4\text{ m/s}^2 \end{array}\right\} \quad \vec{a}_T = 5\,\vec{u}_n - 4\,\vec{u}_t$$