Dinàmica 1

Qüestions

1. **Sobre una massa m actua una força $\vec{F}$ que produeix una acceleració $\vec{a}$. Si ara sobre la mateixa massa actuen dues forces perpendiculars de mòduls iguals al mòdul de $\vec{F}$, que produeixen una acceleració $\vec{a}'$, quina relació tenen els mòduls de les acceleracions?**

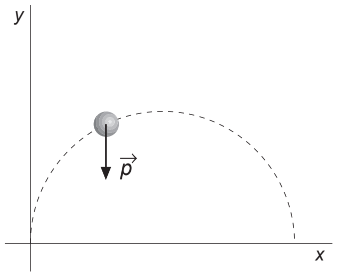
Si apliquem la 2a llei de Newton, $\vec{F} = m\,\vec{a}$, en mòdul, aleshores tenim que $F = m\,a$ i $F' = m\,a'$.

$$F' = \sqrt{F^2 + F^2} = F\sqrt{2} \rightarrow a' = \frac{F'}{m} = \frac{\sqrt{2}\,F}{m} \rightarrow a' = \frac{\sqrt{2}\,\cancel{m}\,a}{\cancel{m}} = \sqrt{2}\,a$$

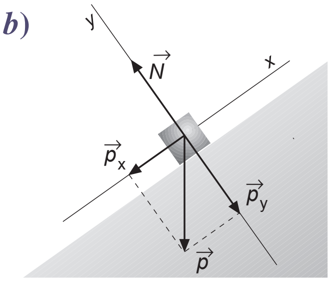
2. **Determineu les forces que actuen sobre cada objecte (fig. 3.42) i discutiu la descomposició d'aquestes respecte d'algun sistema de coordenades adequat.**

En cada figura s'indica el sistema de referència triat i la descomposició de forces segons aquest sistema.

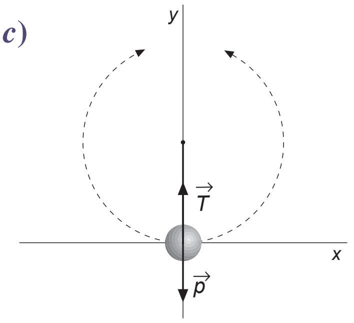
a)



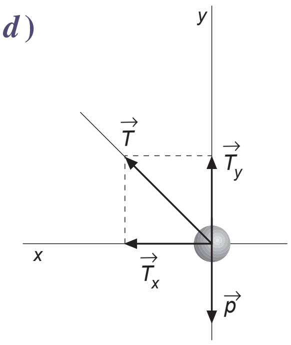
b)



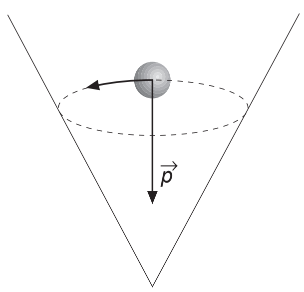
c)



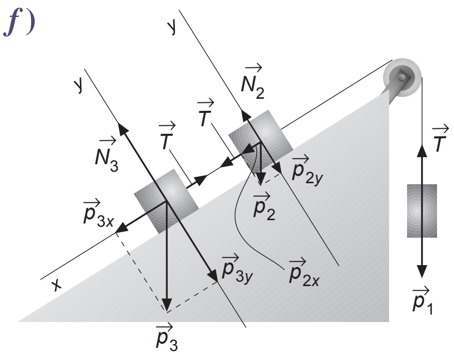
d)



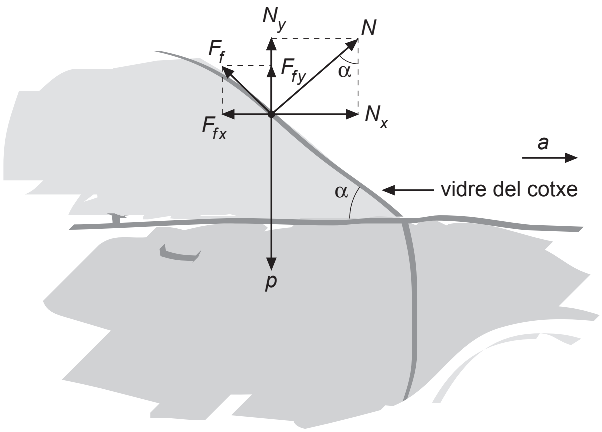
e)



f)



3. **Un automòbil circula per una carretera horitzontal amb acceleració constant, i observem que al vidre del davant hi cau una gota d'aigua (fig. 3.43). Si el coeficient de fregament entre la gota i la superfície del vidre de l'automòbil és μ, i el vidre té un angle d'inclinació α respecte de l'horitzontal, quin ha de ser el valor mínim de l'acceleració perquè la gota d'aigua no caigui?**



Apliquem la 2a llei de Newton: $F = m\,a$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Component } x\text{: } N_x - F_{fx} = m\,a \\ &\text{Component } y\text{: } p - N_y - F_{fy} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &N \sin\alpha - F_f \cos\alpha = m\,a \\ &mg - N\cos\alpha - F_f \sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &N \sin\alpha - \mu\, N\cos\alpha = m\,a \\ &N\cos\alpha - \mu\, N \sin\alpha = m\,g \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &N\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = m\,a \\ &N\,(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = m\,g \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\cancel{N}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cancel{N}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}g} \;\rightarrow\; a = g\left(\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\right)$$

4. **Tenint en compte el principi d'inèrcia, expliqueu què passa quan circulem amb un automòbil que descriu una corba.**

Si tenim en compte el principi d'inèrcia, l'automòbil tendeix a seguir en la mateixa direcció que portava.

5. **En el moment que un pèndol simple passa per la posició més baixa, la tensió i el pes, coincideixen? Raoneu-ho.**

En aquesta posició, $T - p = m\,\dfrac{v^2}{l}$. Si tenim en compte que l'acceleració centrípeta és positiva, deduïm que: $T - p > 0 \;\rightarrow\; T > p$.

6. **Pengem dos cossos diferents de dues molles que tenen la mateixa constant elàstica. Raoneu com són entre ells els períodes d'oscil·lació dels cossos en els casos següents:**

L'expressió que lliga la constant elàstica amb la massa i el període és $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

a) **Un dels cossos té una massa quatre vegades més gran que l'altre, però estan separats la mateixa distància de la posició d'equilibri.**

Si la constant elàstica dels dos oscil·ladors és la mateixa i la massa del primer és quatre vegades la del segon:

$$\left.\begin{aligned} &m_1 \\ &m_2 = 4\,m_1 \end{aligned}\right\}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}\;;\; T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\,m_1}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\,T_1 \;\rightarrow\; T_2 = 2\,T_1$$

Així doncs, el període del segon oscil·lador és la meitat del període del primer.

b) **Els cossos són iguals, però l'amplitud d'oscil·lació d'un cos és el doble que la de l'altre.**

Ara estem considerant que tant les masses dels oscil·ladors com les seves constants elàstiques són les mateixes per a tots dos. Si tenim en compte que l'amplitud no està relacionada amb les magnituds anteriors i recordeu l'expressió anterior que relaciona el període amb la massa i la constant elàstica, hem de concloure que els períodes d'oscil·lació de tots dos casos també són iguals.

7. **Tenim dos pèndols de la mateixa longitud, però la massa d'un és el doble de la de l'altre. Com són els períodes entre ells?**

El període d'oscil·lació d'un pèndol ve donat per l'expressió $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Per tant, podem comprovar que la massa no influeix en el valor del període. Així, si les longituds dels dos pèndols són iguals, els seus períodes també són iguals.

8. **Tenim dos pèndols de la mateixa massa, però la longitud d'un és quatre vegades la de l'altre. Com són els períodes entre ells?**

El període d'oscil·lació d'un pèndol ve donat per l'expressió $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Per tant,

$$\left.\begin{array}{l} l_1 \\ \\ l_2 = 4\,l_1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{4\,l_1}{g}} = 2\cdot 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} = 2\,T_1 \rightarrow T_2 = 2\,T_1 \end{array}$$

9. **Si augmentem el coeficient de fregament al doble, com varia la velocitat mínima de gir d'un rotor de fira?**

La velocitat mínima de gir d'un rotor de fira és: $v = \sqrt{\frac{g\,R}{\mu}}$.

En augmentar el doble el coeficient de fregament, la velocitat mínima v' és:

$$v' = \sqrt{\frac{g\,R}{2\,\mu}}$$

d'on tenim que $v' = \frac{v}{\sqrt{2}}$.

10. **Per què un motorista s'inclina quan descriu un revolt sense peralt?**

Per contrarestar els efectes del principi d'inèrcia, que tendeix a fer anar la moto en sentit contrari a aquesta inclinació.

11. **S'ha de resoldre el que va proposar Galileu. Una corda està penjada dalt d'una torre alta, de manera que l'extrem superior és invisible i innaccessible, però l'extrem inferior sí que es veu. Com trobaríeu la longitud de la corda?**

Sabem que el període d'oscil·lació d'un pèndol simple és $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Si fem oscil·lar la corda i mesurem el període d'oscil·lació, segons aquesta expressió tenim:

$$\frac{T^2}{4\,\pi^2} = \frac{l}{g} \rightarrow l = \left(\frac{T}{2\,\pi}\right)^2 g$$

Problemes

1. Un cos de 5 kg de massa es mou sobre una trajectòria donada per l'equació de moviment

$$\vec{r} = (t^2 - t)\,\vec{i} + (3\,t^3 + 2)\,\vec{i}$$

on $\vec{r}$ i t s'expressen en unitats del SI.

Determineu:

a) **La força mitjana que actua damunt del cos entre els instants $t = 0$ s i $t = 5$ s.**

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t - 1)\,\vec{i} + 9t^2\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(0) = -\vec{i}$$

$$\vec{v}(5) = 9\,\vec{i} + 225\,\vec{j}$$

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m\left(\vec{v}(5) - \vec{v}(0)\right) = 5\left(9\,\vec{i} + 225\,\vec{j} - (-\vec{i})\right) = 5\,(10\,\vec{i} + 255\,\vec{j}) = 50\,\vec{i} + 1125\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{50\,\vec{i} + 1125\,\vec{j}}{5} = 10\,\vec{i} + 225\,\vec{j}$$

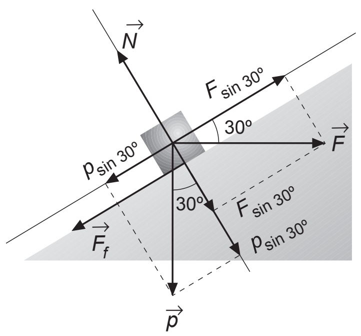
b) **La força instantània en funció del temps.**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = 5\left[(2t - 1)\,\vec{i} + 9t^2\vec{j}\right] = (10t - 5)\,\vec{i} + 45t^2\vec{j}$$

$$\vec{F} = \frac{d\left[(10t - 5)\,\vec{i} + 45t^2\vec{j}\right]}{dt} = 10\,\vec{i} + 90t\vec{j}$$

2. Sobre un cos de 2 kg, que es troba sobre un pla inclinat de 30°, hi actua una força $\vec{F}$ en una direcció horitzontal (fig. 3.44). Si el coeficient de fregament entre el cos i el pla és negligible:

a) **Representeu totes les forces que actuen sobre el cos.**



b) **Calculeu el valor de la força $\vec{F}$ perquè el cos es mogui cap a la part superior del pla amb velocitat constant.**

$F\cos 30° = p\sin 30° \rightarrow F = p\,\text{tg}\,30° \rightarrow F = 2 \cdot 9{,}8\,\text{tg}\,30° = 11{,}3$ N

c) **Si el coeficient de fregament entre el cos i el pla és de 0,3, com canviarien els apartats anteriors?**

$$\left.\begin{aligned} &F\cos 30° - p\sin 30° - F_f = 0 \\ &N = F\sin 30° + p\cos 30° \end{aligned}\right\}$$

$F \cos 30° - \mu N - p \sin 30° = 0$

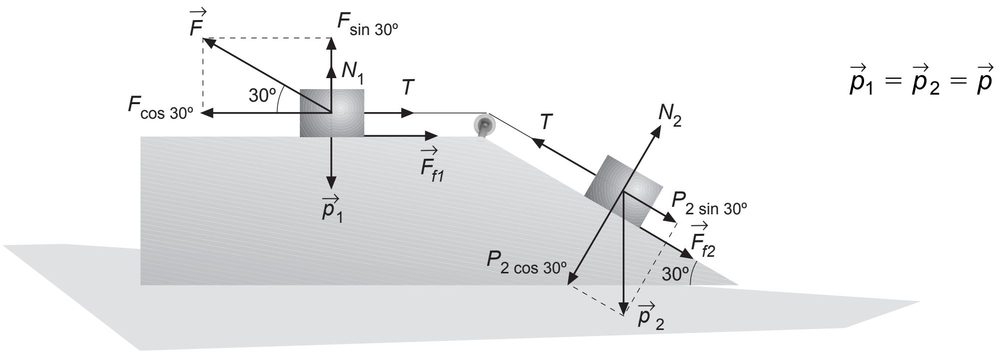
$F \cos 30° - \mu (F \sin 30° + p \cos 30°) - p \sin 30° = 0$

$F \cos 30° - \mu F \sin 30° - \mu p \cos 30° - p \sin 30° = 0$

$$F = \frac{p(\mu \cos 30° + \sin 30°)}{\cos 30° - \mu \sin 30°} = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}3 \cos 30° + \sin 30°)}{\cos 30° - 0{,}3 \sin 30°}$$

F = 20,8 N

3. Observeu el sistema representat en la figura 3.45. Calculeu la tensió i l'acceleració amb què es mou el sistema, si el mòdul de la força $\vec{F}$ val 200 N, la massa de cada bloc és de 20 kg i el coeficient de fregament és de 0,2 per a tots dos cossos.



cos 1:

$p = N_1 + F \sin 30°$

$20 \cdot 9{,}8 = N_1 + 200 \cdot \sin 30°$

$N_1 = 20 \cdot 9{,}8 - 200 \cdot \sin 30°$

$N_1 = 96$ N

$F \cos 30° - \mu N_1 - T = m_1 a$

$200 \cdot \cos 30° - 0{,}2 \cdot 96 - T = 20 a$

$154 - T = 20 a$

Cos 2:

$$\left.\begin{aligned} &T - p \sin 30° - \mu N_2 = m_2 a \\ &p \cos 30° = N_2 \end{aligned}\right\}$$

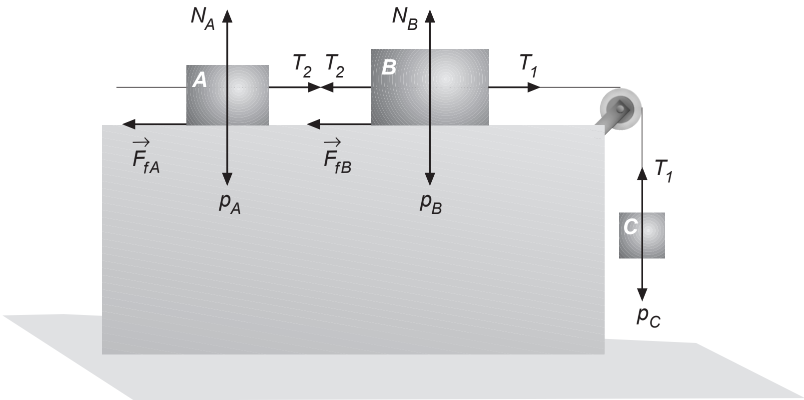
$T - 20 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 30° - 0{,}2 \cdot 20 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30° = 20 a$

$T - 131{,}95 = 20 a$

$$\left.\begin{aligned} &154 - T = 20 a \\ &T - 131{,}95 = 20 a \end{aligned}\right\} \quad 154 - T = T - 131{,}95 \rightarrow T = \frac{154 + 131{,}95}{2} = 142{,}97 \text{ N}$$

$$a = \frac{154 - 142{,}97}{20} = 0{,}55 \text{ m/s}^2$$

4. **En el sistema de la figura 3.46 les masses són m_A = 1 kg, m_B = 3 kg, m_C = 6 kg, mentre que el coeficient de fregament entre el cos *A* i *B* i el terra és de 0,1. Calculeu les tensions i l'acceleració del sistema.**



Cos A $\left.\begin{array}{l} T_2 - F_{fA} = m_A a \\ p_A = N_A \end{array}\right\}$ $T_2 - \mu p_A = m_A a \rightarrow T_2 - 0{,}1 \cdot 9{,}8 = a \rightarrow T_2 = 0{,}98 + a$

Cos B $\left.\begin{array}{l} T_1 - T_2 - F_{fB} = m_B a \\ p_B = N_B \end{array}\right\}$ $T_1 - T_2 - \mu p_B = m_B a \rightarrow T_1 - T_2 - 0{,}1 \cdot 3 \cdot 9{,}8 = 3a \rightarrow$
$\rightarrow T_1 - T_2 - 2{,}94 = 3a$

Cos C $p_C - T_1 = m_C a \rightarrow 6 \cdot 9{,}8 - T_1 = 6a \rightarrow T_1 = 58{,}8 - 6a$

Si solucionem el sistema d'equacions, tenim:

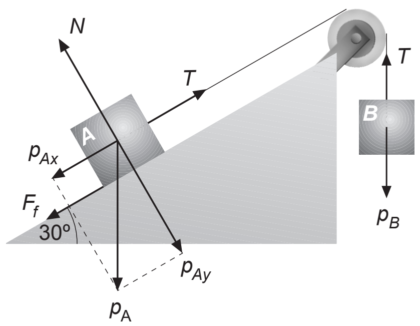
$58{,}8 - 6a - 0{,}98 - a - 2{,}94 = 3a \rightarrow 54{,}88 = 10a \rightarrow a = 5{,}49$ m/s^2

$T_1 = 58{,}8 - 6 \cdot 5{,}49 = 25{,}86$ N

$T_2 = 0{,}98 + 5{,}49 = 6{,}47$ N

5. **En el sistema de la figura 3.47 les masses *A* i *B* valen 10 kg i 8 kg, respectivament, mentre que el coeficient de fregament estàtic entre la massa *A* i el pla inclinat és de 0,2. Determineu la massa mínima que ha de tenir *C* perquè el sistema no es mogui, considerant que entre el cos *C* i el cos *A* hi ha un fregament molt gran.**

Si hem de col·locar un cos de massa *C* damunt de *A*, hem d'interpretar que el sistema es mou inicialment cap al cos de massa *B*. Es pot comprovar calculant l'acceleració amb què es mou el sistema inicial, però tenint en compte que $\mu d < \mu e$; per tant, podem fer un petit error en el càlcul de l'acceleració.



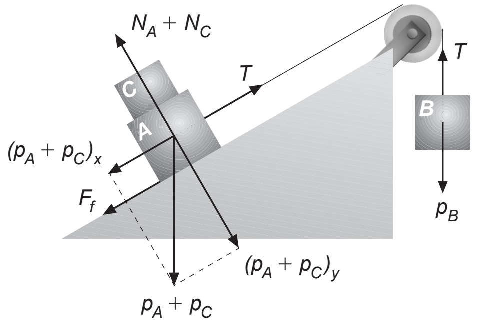
$$\left.\begin{array}{l} p_B - T = m_B a \\ T - p_A \sin \alpha - \mu p_A \cos \alpha = m_A a \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 8{,}98 - T = 8a \\ T - 10 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 30° - 0{,}2 \cdot 10 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30° = 10a \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 78{,}4 - T = 8a \\ T - 49 - 16{,}97 = 10a \end{array}\right\}$$

$78{,}4 - 65{,}97 = 18a \rightarrow a = 0{,}69$ m/s^2

Si el sistema no s'ha de moure quan posem damunt de A un cos de massa C, les forces s'han d'igualar:



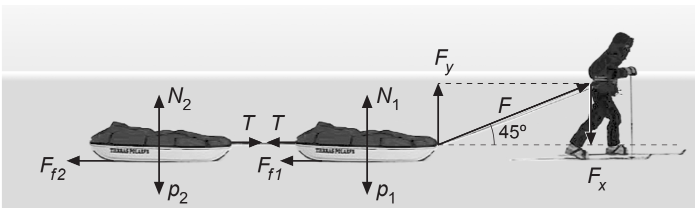
$p_B = (p_A + p_C) \sin 30° + \mu\,(p_A + p_C) \cos 30°$

$8 \cdot 9{,}8 = (10 \cdot 9{,}8 + m_C 9{,}8) \sin 30° + 0{,}2 \cdot (10 \cdot 9{,}8 + m_C 9{,}8) \cos 30°$

$78{,}4 = 49 + 49\,m_C + 16{,}97 + 1{,}7\,m_C$

$$m_C = \frac{78{,}4 - 49 - 16{,}97}{4{,}9 + 1{,}7} = 1{,}88 \text{ kg}$$

6. Un home tira de dos trineus amb una força de 117,6 N que forma un angle de 45° amb l'horitzontal (fig. 3.48). Si els dos trineus tenen una massa de 15 kg i el coeficient de fregament dels trineus amb la neu és de 0,02, calculeu:



$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3$

a) **L'acceleració dels trineus i la tensió de la corda que els uneix.**

Cos 1

$F \cos 45° - T - F_{f1} = m_1 a$

$p_1 - N_1 - F \sin 45° = 0$

$F \cos 45° - T - \mu N_1 = m_1 a$

$N_1 = p_1 - F \sin 45° = 15 \cdot 9{,}8 - 117{,}6 \sin 45° = 63{,}84 \text{ N}$

$117{,}6 \cos 45° - T - 0{,}02 \cdot 63{,}84 = 15\,a$

$81{,}88 - T = 15\,a$

Cos 2

$$\left.\begin{array}{l} p_2 = N_2 \\ T - F_{f2} = m_2 a \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} p_2 = N_2 \\ T - \mu N_2 = m_2 a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} p_2 = 9{,}8 \cdot 15 = 147 \text{ N} \\ T - 0{,}02 \cdot 147 = 15\,a \rightarrow T - 2{,}94 = 15\,a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 81{,}88 - T = 15\,a \\ T - 2{,}94 = 15\,a \end{array}\right\} \; 81{,}88 - T = T - 2{,}94 \rightarrow 2T = 81{,}88 + 2{,}94 \rightarrow T = \frac{84{,}82}{2} = 42{,}41 \text{ N}$$

$$a = \frac{42{,}41 - 2{,}94}{15} = 2{,}63 \text{ m/s}^2$$

b) **El valor de la força $\vec{F}$ perquè els trineus es moguin amb velocitat constant.**

Cos 1

$$\left.\begin{array}{l} F\cos 45° - T - F_{f1} = 0 \rightarrow F\cos 45° - T - \mu N_1 = 0 \\ N_1 = p_1 - F\sin 45° \end{array}\right\} \; F\cos 45° - T - \mu(p_1 - F\sin 45°) = 0$$

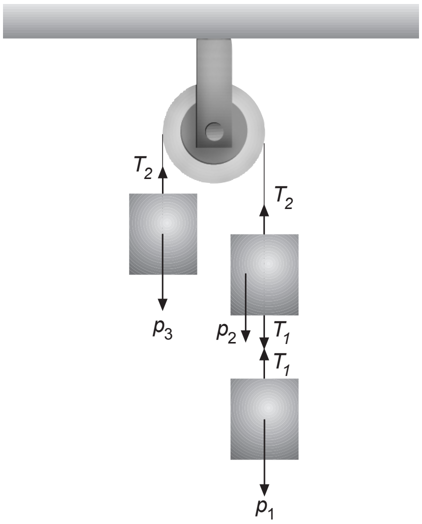
Cos 2

$$\left.\begin{array}{l} p_2 = N_2 \\ T = F_{f2} = \mu N_2 = 0{,}02 \cdot 15 \cdot 9{,}8 = 2{,}94\ \text{N} \end{array}\right\}$$

$$F\cos 45° - 2{,}94 - 0{,}02 \cdot 15 \cdot 9{,}8 - 0{,}02 \cdot F \cdot \sin 45° = 0$$

$$F = \frac{2{,}94 + 0{,}02 \cdot 15 \cdot 9{,}8}{\cos 45° + 0{,}02 \cdot \sin 45°} = 8{,}15\ \text{N}$$

7. En el sistema representat a la figura 3.49 cada cos té una massa de 3 kg. Hi negligim la massa de la politja, la massa de les cordes i el fregament. Trobeu:



a) **L'acceleració del sistema.**

$$\left.\begin{array}{l} p_1 - T_1 = m_1 a \\ p_2 + T_1 - T_2 = m_2 a \\ T_2 - p_3 = m_3 a \end{array}\right\}$$

$$p_1 + p_2 - p_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$3 \cdot 9{,}8 + 3 \cdot 9{,}8 - 3 \cdot 9{,}8 = (3 + 3 + 3)a$$

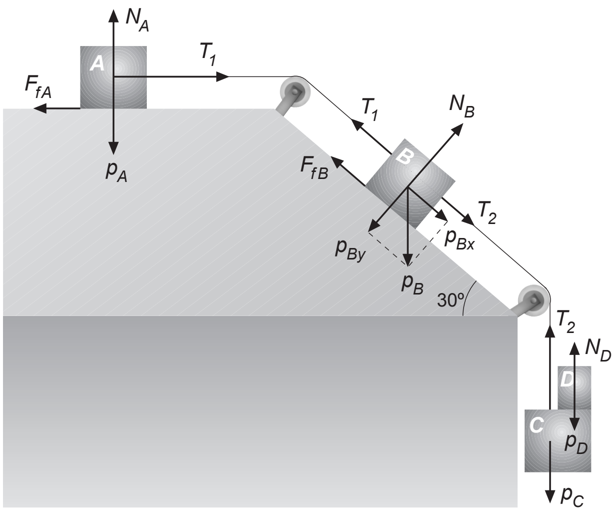
$$a = \frac{3 \cdot 9{,}8}{9} = 3{,}27\ \text{m/s}^2$$

b) **La tensió de les cordes que uneixen els blocs.**

$$T_1 = p_1 - m_1 a = 3 \cdot 9{,}8 - 3 \cdot 3{,}27 \rightarrow T_1 = 19{,}6\ \text{N}$$

$$T_2 = p_3 + m_3 a = 3 \cdot 9{,}8 + 3 \cdot 3{,}27 = 39{,}2\ \text{N}$$

8. En el sistema representat en la figura 3.50, les masses valen m_A = 1 kg, m_B = 2 kg, m_C = 5 kg, m_D = 0,5 kg. El coeficient de fregament entre els cossos i la superfície és de 0,2. Calculeu:



a) **L'acceleració del sistema.**

Cos A

$$\left.\begin{array}{l} T_1 - T_{fA} = m_A a \\ p_A = N_A \end{array}\right\} \; T_1 - \mu p_A = m_A a$$

$$T_1 - 0{,}2 \cdot 9{,}8 = a \rightarrow T_1 - 1{,}96 = a$$

Cos B

$$T_2 + p_B \sin 30° - F_{fB} - T_1 = m_B a$$

$$T_2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 - \mu N_B - T_1 = 2a$$

$$N_B = p_B \cos 30° = 2 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30° = 16{,}97\ \text{N}$$

$$T_2 + 9{,}8 - 3{,}39 - T_1 = 2a \rightarrow T_2 + 6{,}41 - T_1 = 2a$$

Cos C

$p_D + p_C - T_2 = (m_C + m_D)\,a$

$5{,}5 \cdot 9{,}8 - T_2 = 5{,}5\,a \rightarrow 53{,}9 - T_2 = 5{,}5\,a$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 - 1{,}96 = a \\ T_2 + 6{,}41 - T_1 = 2\,a \\ 53{,}9 - T_2 = 5{,}5\,a \end{array}\right\} \begin{array}{l} T_1 = a + 1{,}96 \\ T_2 = 53{,}9 - 5{,}5\,a \\ 53{,}9 - 5{,}5\,a + 6{,}41 - a - 1{,}96 = 2\,a \end{array}$$

$$58{,}35 = 8{,}5\,a \rightarrow a = \frac{58{,}35}{8{,}5} = 6{,}86 \text{ m/s}^2$$

b) **Les tensions de les cordes.**

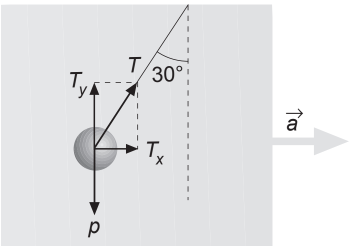
$T_1 = 6{,}86 + 1{,}96 = 8{,}82$ N

$T_2 = 53{,}9 - 5{,}5 \cdot 6{,}86 = 16{,}15$ N

c) **La força que fa la massa *D* sobre la massa *C*.**

$p_D - N = m_D A \rightarrow N = p_D - m_D a = 0{,}5 \cdot 9{,}8 - 0{,}5 \cdot 6{,}86 = 1{,}47$ N

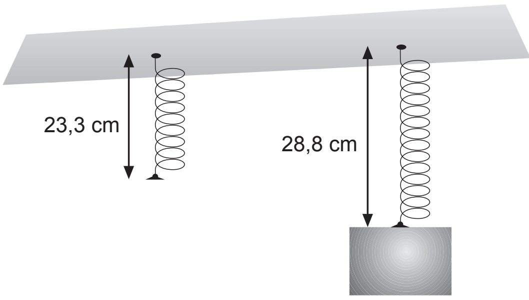
9. **Un pèndol penja del sostre d'un tren que avança en línia recta amb acceleració constant. Si es desvia 30° respecte de la vertical, calculeu l'acceleració del tren i la tensió de la corda.**



$$\left.\begin{array}{l} T_x = m\,a \\ T_y = p \end{array}\right\} \begin{array}{l} T \sin 30° = m\,a \\ T \cos 30° = m\,g \end{array}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{a}{g} \rightarrow a = g \text{ tg } 30° = 5{,}65 \text{ m/s}^2$$

10. **Un oscil·lador harmònic es construeix fixant l'extrem superior d'una molla, penjant-hi una massa de 23 g de l'extrem inferior i separant la massa 7,5 cm de la seva posició d'equilibri. Prèviament hem mesurat la longitud en repòs de la molla sense la massa i amb la massa penjada, i hem obtingut uns resultats de 23,3 cm i 28,8 cm, respectivament.**



a) **Escriviu l'equació del moviment d'aquest oscil·lador suposant que comencem a comptar el temps quan la massa passa per la posició d'equilibri i amb velocitat positiva.**

$F = k\Delta y \rightarrow m\,g = k\Delta y$

$$k = \frac{m\,g}{\Delta y} = \frac{0{,}023 \cdot 9{,}8}{0{,}0288 - 0{,}0233} = 4{,}025 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4{,}025}{0{,}023}} = 13{,}23 \text{ rad/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = A \sin(\omega t + \varphi) \\ y = 0 \\ A = 0{,}075 \text{ m} \end{array}\right\} \quad y = 0{,}075 \sin 13{,}23\, t$$

b) **Quines són la velocitat i l'acceleració màximes?**

$v_{màx} = A\omega = 0{,}075 \cdot 13{,}23 = 0{,}99$ m/s

$a_{màx} = A\omega^2 = 0{,}075 \cdot 13{,}23^2 = 13{,}13$ m/s^2

11. Una molla té una constant elàstica de 75 N/m. Una massa que penja d'aquesta molla oscil·la amb una freqüència de 3,5 Hz quan la separem 2,5 cm de la posició d'equilibri. Quin és el valor d'aquesta massa?

$$\left.\begin{array}{l} k = 75 \text{ N/m} \\ f = 3{,}5 \text{ Hz} \end{array}\right\}$$

$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}5 = 7\pi$ rad/s

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{75}{(7\pi)^2} = 0{,}1551 \text{ kg} = 155{,}1 \text{ g}$$

12. Un cos de 92 g de massa està enganxat a una molla i experimenta un moviment harmònic simple, de manera que en l'instant inicial l'elongació és la sisena part de l'amplitud, mentre que la velocitat i l'acceleració són, respectivament, −0,38 m/s i 5,42 m/s^2.

D'acord amb les dades, la velocitat inicial és positiva, mentre que l'acceleració inicial és negativa; aquesta situació només és possible quan l'elongació inicial també és negativa. Per calcular A, ω i φ_0 resolem les equacions que s'obtenen de l'elongació, la velocitat i l'acceleració en l'instant inicial prenent valors absoluts, i, en donar l'equació del moviment, tindrem en compte el signe negatiu de l'elongació inicial:

a) **Escriviu les equacions del moviment, de la velocitat i de l'acceleració.**

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow x(0) = \frac{A}{6}$$

$$\frac{\cancel{A}}{6} = \cancel{A} \sin \varphi \rightarrow \varphi = \sin^{-1} \frac{1}{6} = 9{,}59° = 0{,}17 \text{ rad}$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow v(0) = -0{,}38 \text{ m/s}$$

$$-0{,}38 = A\omega \cos \varphi \rightarrow -0{,}38 = A\omega \cos 9{,}59° \rightarrow -0{,}38 = A \cdot \omega \cdot 0{,}986 \rightarrow A\omega = -0{,}385$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow a(0) = 5{,}42 \text{ m/s}^2$$

$$-5{,}42 = A\omega^2 \sin \varphi \rightarrow -5{,}42 = A\omega^2 \frac{1}{6} \rightarrow -32{,}52 = A\omega^2$$

$$-32{,}52 = -0{,}385\, \omega \rightarrow \omega = \frac{32{,}52}{0{,}385} = 84{,}38 \text{ rad/s}$$

$$A = -\frac{0{,}385}{84{,}38} = -4{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$x(t) = -4{,}5 \cdot 10^{-3} \sin(84{,}38\, t + 0{,}17) \text{ m}$$

$$v(t) = -0{,}38 \cos(84{,}38\, t + 0{,}17) \text{ m/s}$$

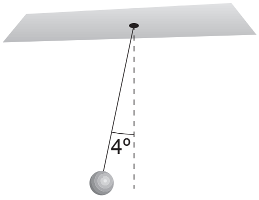
$$a(t) = 32{,}5 \sin(84{,}38\, t + 0{,}17) \text{ m/s}^2$$

b) **Determineu la constant elàstica de la molla i escriviu l'expressió de la força recuperadora en funció del temps.**

$k = \omega^2 m = 84{,}32^2 \cdot 0{,}092 = 655{,}04$ N/m

$F(t) = m a(t) = 2{,}94 \sin(84{,}38\,t + 0{,}17)$ N

13. Construïm un pèndol amb una petita massa que penja d'un fil. Si el separem un angle de 4° de la posició d'equilibri, es posa a oscil·lar amb un període de 2,3 s.



a) **Quina és la longitud del fil?**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2}\, g = l$$

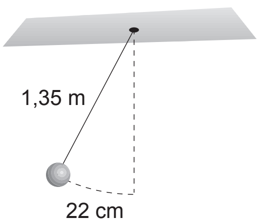
$$l = \frac{2{,}3^2 \cdot 9{,}8}{4\pi^2} = 1{,}31 \text{ m}$$

b) **Escriviu l'equació del moviment suposant que en l'instant inicial el cos està passant per la posició d'equilibri.**

$$\left.\begin{aligned} &s = l \sin\Theta = 1{,}31 \sin 4° = 0{,}09 \text{ m} \\ &\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}31}} = 2{,}73 \text{ rad/s} \\ &X_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0 \end{aligned}\right\} \; s(t) = S \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$s(t) = 0{,}09 \sin 2{,}73\,t$

14. Separem un pèndol una longitud d'arc de 22 cm respecte de la posició d'equilibri. Si la longitud del pèndol és d'1,35 m i la massa que hi penja és de 2 kg, calculeu:



a) **El període i la freqüència angular de les oscil·lacions que es produeixen.**

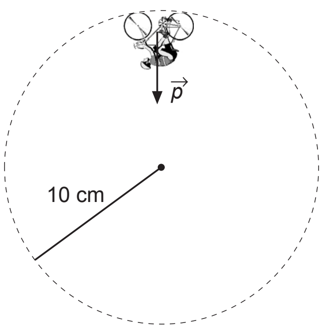
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1{,}35}{9{,}8}} = 2{,}33 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}33} = 2{,}69 \text{ rad/s}$$

b) **La velocitat màxima del pèndol.**

$v_{màx} = A\omega = 0{,}22 \cdot 2{,}69 = 0{,}59$ m/s

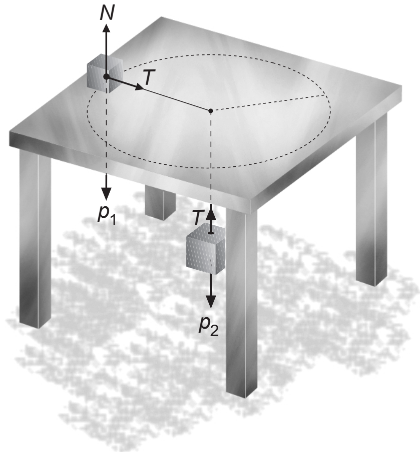
15. Quina velocitat mínima ha de dur un ciclista per poder efectuar un ris de la mort d'un radi de 10 m? (fig. 3.51).



$$p = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}8 \cdot 10} = 9{,}9 \text{ m/s}$$

16. **Una massa d'1 kg situada sobre una taula que no presenta fregament s'uneix a una altra massa de 4 kg mitjançant una corda que passa per un forat fet al mig de la taula. El cos de 4 kg està en repòs, mentre que el cos d'1 kg descriu un moviment circular uniforme amb un radi de 0,1 m.**

a) **Feu un esquema de les forces que actuen sobre cada cos i especifiqueu-hi les relacions que hi ha entre elles.**



b) **Calculeu la velocitat *v* amb què es mou el primer cos.**

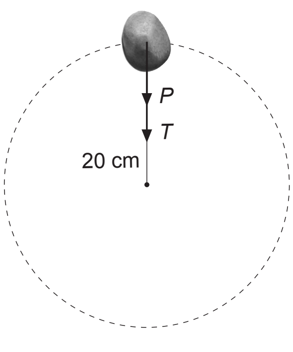
$$\left.\begin{aligned} p_2 &= T \\ T &= m_1 \frac{v^2}{R} \end{aligned}\right\} \quad p_2 = m_1 \frac{v^2}{R} \rightarrow 4 \cdot 9{,}8 = \frac{v^2}{0{,}1} \rightarrow v = \sqrt{4 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1} = 1{,}98 \text{ m/s}$$

c) **Indiqueu quines són les acceleracions tangencial i normal del primer cos.**

$a_t = 0$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1{,}98^2}{0{,}1} = 39{,}2 \text{ m/s}^2$$

17. **Es fa giravoltar una pedra de 25 g en un pla vertical mitjançant una corda de 20 cm de longitud:**



$m = 25$ kg

$r = 20$ cm

a) **Quina és la tensió de la corda quan la pedra es troba en el punt més alt de la seva trajectòria si, en aquest moment, la velocitat lineal que duu és de 4 m/s?**

$$T + p = m \frac{v^2}{r}$$

$$T = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) = 0{,}025 \cdot \left(\frac{4^2}{0{,}2} - 9{,}8\right) \rightarrow T = 1{,}76 \text{ N}$$

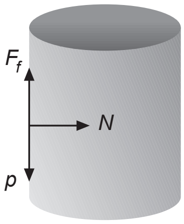
b) **Quin és el valor mínim de la velocitat perquè la corda es mantingui tibada en passar la pedra pel punt més alt de la circumferència que descriu?**

$T = 0$

$$p = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{g\,r} = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}2} = 1{,}4 \text{ m/s}$$

18. **En un parc d'atraccions hi ha un rotor de radi 5 m, dins del qual se situen 5 persones que es recolzen a la paret interior. Quan el cilindre gira al voltant del seu eix, les persones que són a dintre queden encastades a la paret, que presenta un coeficient de fregament d'1:**

a) **Quina és la velocitat angular mínima del cilindre perquè pugui girar en un pla vertical sense que ningú se separi de la paret?**



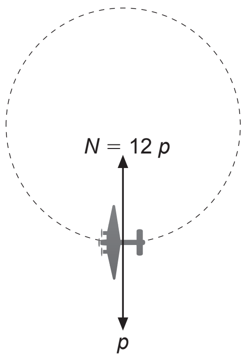
$$\left.\begin{array}{l} N = m\omega^2 R \\ p = F_f \end{array}\right\} \rightarrow p = \mu N \rightarrow N = \frac{p}{\mu}$$

$$\frac{p}{\mu} = m\omega^2 R \rightarrow \frac{\cancel{m}g}{\mu} = \cancel{m}\omega^2 R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R\mu}} = \sqrt{\frac{9,8}{5}} = 1,4 \text{ rad/s}$$

b) **En el supòsit anterior, quina força exerceix el cilindre sobre les 5 persones que hi van a dins, si cada una d'elles té una massa de 55 kg?**

$N = m\omega^2 R = 5 \cdot 55 \cdot 1,4^2 \cdot 5 = 2\,695$ N

19. **En una exhibició aèria, una avioneta vola a 700 km/h i fa un ris, de manera que descriu una circumferència en un pla vertical. Quin radi ha de tenir el ris, si la força que fa el pilot contra el seient és 12 vegades el seu pes en passar pel punt més baix?**

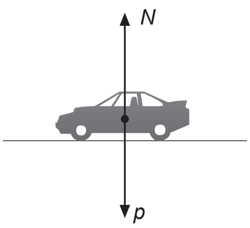


700 km/h = 194,44 m/s

$$12p - p = m\frac{v^2}{R} \rightarrow 11\,\cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{11g} = \frac{194,44^2}{11 \cdot 9,8} = 350,7 \text{ m}$$

20. **Un automòbil circula per una carretera horitzontal a una velocitat constant de 80 km/h. Calculeu la força que exerceix el seient de l'automòbil sobre el conductor de 75 kg de massa en els casos següents:**

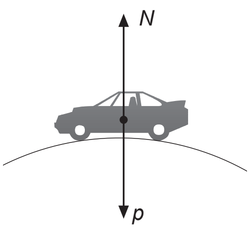
a) **L'automòbil circula per un tram recte.**



80 km/h = 22,22 m/s

$N = p = 75 \cdot 9,8 = 735$ N

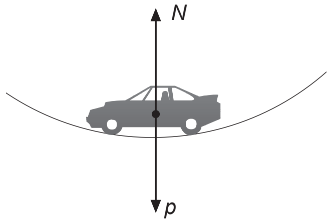
b) **L'automòbil es troba en el punt més alt d'un canvi de rasant que té un radi de curvatura de 80 m.**



$$p - N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

$$N = 75 \cdot \left(9,8 - \frac{22,22^2}{80}\right) = 272,04 \text{ N}$$

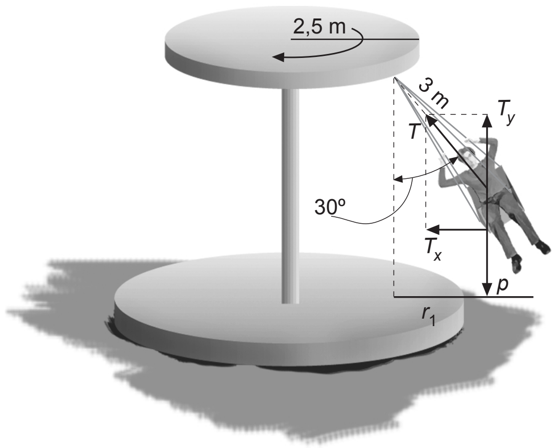
c) **L'automòbil es troba en el punt més baix d'un gual que té un radi de curvatura de 80 m.**



$$N - p = m\frac{v^2}{R} \rightarrow N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$$

$$N = 75 \cdot \left(9,8 + \frac{22,22^2}{80}\right) = 1197,96 \text{ N}$$

21. **Una atracció de fira consisteix en una rotllana horitzontal de 2,5 m de radi d'on pengen uns gronxadors de 3 m de longitud (fig. 3.52). Si en un dels gronxadors de 2 kg de massa s'hi asseu un noi de 70 kg, calculeu la velocitat angular amb què ha de girar la rotllana per aconseguir que els gronxadors formin un angle de 30° amb la vertical.**



$m = 70$ kg

$m_e = 2$ kg

$$\sin 30° = \frac{r_1}{l} \rightarrow r_1 = l \sin 30° = 3 \cdot \sin 30° = 1,5 \text{ m}$$

$R = 1,5 + 2,5 = 4$ m

$$\left.\begin{array}{l} T_x = m\omega^2 R \\ T_y = p \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} T \sin 30° = m\omega^2 R \\ T \cos 30° = mg \end{array}\right\}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{m^2 R}{g} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \text{ tg } 30°}{R}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9,8 \cdot \text{tg } 30°}{4}} = 1,19 \text{ rad/s}$$

22. **Un automòbil entra en un revolt de 120 m de radi a 90 km/h. Calculeu el mínim peralt que ha de tenir la corba, si no hi considerem el fregament.**

$$\text{tg } \alpha = \frac{v^2}{Rg} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{25^2}{120 \cdot 9,8} = 0,53 \rightarrow \alpha = 27,99°$$