Dinàmica 2

Qüestions

1. Les forces que actuen sobre un cos quan descriu un moviment circular uniforme, efectuen cap treball? Raoneu-ho.

Si el cos es mou amb MCU, l'acceleració tangencial és zero i només té acceleració centrípeta. Per tant, la força neta ha de ser centrípeta i, en tot moment, és perpendicular al vector desplaçament instantani. Si apliquem l'expressió del treball, $W = \int \vec{F} \cdot \Delta \vec{r},$ veiem que $W = 0$.

2. Raoneu quina de les dues afirmacions és certa:

a) **El centre de masses d'un sistema de dues partícules està situat en la línia que uneix les dues masses.**

b) **El centre de masses d'un sistema de dues partícules està situat en el punt mitjà de la línia que les uneix.**

Si apliquem l'expressió del centre de masses d'un sistema en el cas de dues partícules, comprovem que la resposta correcta és la de l'apartat *a*).

Sigui $\vec{r}_1 = (x_1 , y_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2 , y_2)$. Les coordenades del centre de masses són:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 (x_1 , y_1) + m_2 (x_2 , y_2)}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} , \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right)$$

L'equació de la recta que passa per les dues masses és:

$$y_2 - y_1 = p (x_2 - x_1) \rightarrow p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Substituïm el component *x* del centre de masses, per trobar el component *y*:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_1 \right)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(\frac{\cancel{m_1 x_1} + m_2 x_2 - \cancel{m_1 x_1} - m_2 x_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(\frac{m_2 x_2 - m_2 x_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{\cancel{x_2 - x_1}} \left(\frac{m_2 (\cancel{x_2 - x_1})}{m_1 + m_2} \right)$$

$$y - y_1 = (y_2 - y_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$y = (y_2 - y_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2} + y_1$$

$$y = \frac{m_2 (y_2 - y_1) + y_1 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$$

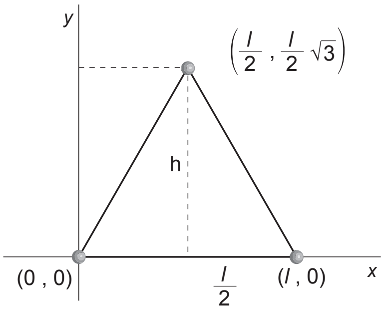
$$y = \frac{m_2 y_2 - \cancel{m_2 y_1} + m_1 y_1 + \cancel{m_2 y_1}}{m_1 + m_2}$$

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

que correspon al component *y* del centre de masses.

3. **Si tres partícules iguals es troben en els extrems d'un triangle equilàter de costat *l*, on és el centre de masses?**

Si tenim en compte l'expressió del centre de masses en el cas d'un sistema de tres partícules iguals situades en els vèrtexs d'un triangle equilàter, es demostra que el centre de masses està situat en el baricentre del triangle equilàter. Prèviament trobem l'altura del triangle per trobar el component *y* de la partícula m_2, aplicant el teorema de Pitàgores:



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\,l^2 - l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

De l'expressió del centre de masses d'un sistema de partícules, tenim que:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 + m\vec{r}_3}{3\,m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{(0\ ,\ 0) + (l\ ,\ 0) + \left(\frac{l}{2}\ ,\ \sqrt{3}\ \frac{l}{2}\right)}{3} = \frac{\left(l + \frac{l}{2}\ ,\ \sqrt{3}\ \frac{l}{2}\right)}{3} = \frac{\left(\frac{3\,l}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}\,l}{2}\right)}{3} =$$

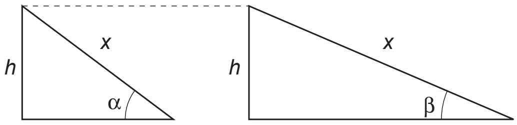
$$= \left(\frac{l}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}\,l}{6}\right)$$

que correspon al baricentre del triangle equilàter.

4. **La resultant de les forces internes que actuen sobre una partícula determinada d'un sistema, és sempre nul·la? Raoneu-ho.**

Les forces internes són les forces degudes a les interaccions mútues entre les partícules del sistema; encara que aquestes forces són d'acció i reacció, i s'anul·len entre si dos a dos per a tot el sistema, però per una partícula determinada no és nul·la.

5. **Per dos plans inclinats d'igual altura però de diferents angles d'inclinació, llisquen sense fregament dos cossos que parteixen del repòs des de la part superior. Calculeu les seves velocitats quan arriben a la base del pla inclinat:**



a) **Aplicant-hi les lleis de Newton.**

Apliquem la 2a llei de Newton, l'equació del moviment i l'equació de la velocitat del MRUA, i tenim en compte les condicions inicials de l'enunciat:

$$F = m\,a \rightarrow m\,g \sin\alpha = m\,a \rightarrow a = g \sin\alpha$$

$$x = \frac{1}{2}\,a\,t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}\,g \sin\alpha\; t^2$$

$$v = a\,t \rightarrow v = g \sin\alpha\; t^2$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{x}$$

Aïllant i substituint, trobem que:

$$x = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\,g \sin\alpha\; t^2 \rightarrow g\,h = \frac{1}{2}\,g^2 \sin^2\alpha\; t^2 \rightarrow g\,h = \frac{1}{2}\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

b) **Aplicant-hi el principi de conservació de l'energia.**

Aplicant el principi de conservació de l'energia mecànica:

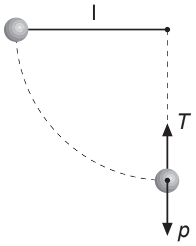
Inici: $E_c = 0$ Final: $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$

$E_p = m\,g\,h$ $E_p = 0$

$$E_{\text{inici}} = E_{\text{final}} \rightarrow \cancel{m}\,g\,h = \frac{1}{2}\,\cancel{m}\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Observeu que s'ha arribat al mateix resultat en els dos casos, i que la velocitat amb què arriba un cos a la part inferior del pla inclinat no depèn de l'angle d'inclinació.

6. Deixem anar un pèndol simple des de la posició horitzontal (fig. 4.19). Demostreu que la tensió del fil, en passar per la posició vertical, és tres vegades el pes del cos.



Representem totes les forces que actuen en la posició vertical i apliquem la 2a llei de Newton:

$$F = m\,a \rightarrow T - p = m\,a_n \rightarrow T - p = m\,\frac{v^2}{l} \rightarrow T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

Per determinar la velocitat que porta el pèndol en la posició vertical, apliquem el principi de conservació de l'energia mecànica. Considerem la referència d'energia potencial zero en la posició més baixa del pèndol:

Inici: $E_c = 0$ Final: $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$

$E_p = m\,g\,l$ $E_p = 0$

$$E_i = E_f \rightarrow m\,g\,l = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{2\,g\,l}$$

Substituïm a l'expressió de la tensió:

$$T = m\,g + m\,\frac{v^2}{l} \rightarrow T = m\,g + m\,\frac{2\,g\,l}{l} \rightarrow T = 3\,m\,g$$

7. **Un cos en repòs esclata i es divideix en dos fragments. Justifiqueu que les velocitats dels dos fragments han de tenir la mateixa direcció. Tindran el mateix sentit, o sentit contrari? Raoneu-ho.**

En tota explosió es conserva la quantitat de moviment; com que inicialment aquesta és nul·la, també ha de ser-ho després de l'explosió. Per tant, les quantitats de moviment dels dos fragments han de ser iguals en mòdul però de sentit contrari.

Inici: $\vec{p}_i = 0$ Final: $\vec{p}_f = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

Com que $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Igualant, tenim que:

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2$$

Problemes

1. **Un sistema està format per quatre partícules de masses 2, 3, 4 i 5 kg que es troben situades en els punts (−2 , 3), (5 , −2), (1 , 0) i (4 , 2) respectivament. Determineu la posició del centre de masses del sistema.**

$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{2(-2\ ,\ 3) + 3(5\ ,\ -2) + 4(1\ ,\ 0) + 5(4\ ,\ 2)}{2 + 3 + 4 + 5}$$

$$\vec{r} = \frac{(-4\ ,\ 6) + (15\ ,\ -6) + (4\ ,\ 0) + (20\ ,\ 10)}{14} = \frac{(35\ ,\ 10)}{4} = (2{,}5\ ,\ 0{,}7)$$

2. **Un projectil de 10 kg de massa és llançat verticalment enlaire. Quan arriba a una certa altura, explota i es divideix en dos trossos que arriben simultàniament a terra. Un tros, de 6 kg, cau a 4 m del punt de llançament. En quin punt cau l'altre tros?**

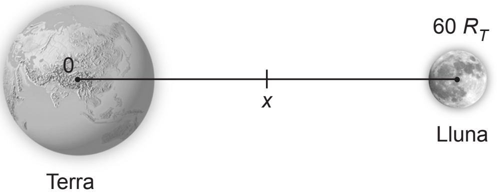
$$\vec{r} = (0\ ,\ 0)$$

$$(0\ ,\ 0) = \frac{6(4\ ,\ 0) + 4(x\ ,\ 0)}{10} = \frac{(24\ ,\ 0) + (4x\ ,\ 0)}{10}$$

$$0 = 24 + 4x \rightarrow x = \frac{-24}{4} = -6 \text{ m}$$

$$\vec{r} = -6\,\vec{i}$$

3. **La massa de la Lluna és aproximadament 0,013 vegades la massa de la Terra, mentre que la distància entre el centre de masses de la Lluna i el centre de masses de la Terra és aproximadament 60 vegades el radi de la Terra. Calculeu el centre de masses del sistema format per la Terra i la Lluna, prenent com a referència el centre de la Terra. Dada: R_T = 6 400 km.**



$M_{Ll} = 0{,}013\ M_T$

$R_T = 6\,400$ km

$$x = \frac{\cancel{M_T}\cdot 0 + 0{,}013\cancel{M_T}\cdot 60\,R_T}{\cancel{M_T} + 0{,}013\cancel{M_T}} = \frac{0{,}013\cdot 60\cdot 6\,400}{1{,}013} = 4\,928 \text{ km}$$

4. **Un sistema està format per tres partícules amb masses de 2 kg, 6 kg i 10 kg que avancen en la direcció de l'eix *X*, i en un instant determinat les seves velocitats respectives són de 2 m/s, −5 m/s i 6 m/s. Calculeu en aquest instant:**

$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$

a) **La quantitat de moviment del sistema.**

$\vec{p} = 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-5) + 10 \cdot 6 = 34\,\vec{i}$ kg m/s

b) **La velocitat del centre de masses.**

$$\vec{p} = M\,\vec{v}_{CM} \rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}}{M} = \frac{34\,\vec{i}}{2 + 6 + 10} = 1{,}89\,\vec{i} \text{ m/s}$$

5. **Un sistema està format per tres partícules amb masses de 2 kg, 6 kg i 12 kg, de manera que les posicions respectives vénen donades per:**

$$\vec{r}_1 = (3t\,,\,0)\ ,\ \vec{r}_2 = (6 + 2t\,,\,2t^2)\ \text{i}\ \vec{r}_3 = (0\,,\,t + t^2)$$

Calculeu:

a) **La posició, la velocitat i l'acceleració del centre de masses del sistema en funció del temps.**

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 + m_3\,\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2\,(3t\,,\,0) + 6\,(6 + 2t\,,\,2t^2) + 12\,(0\,,\,t + t^2)}{2 + 6 + 12} =$$

$$= \frac{(6t\,,\,0) + (36 + 12t\,,\,12t^2) + (0\,,\,12t + 12t^2)}{20} = \frac{(36 + 18t\,,\,12t + 24t^2)}{20} =$$

$$= (1{,}8 + 0{,}9t\,,\,0{,}6t + 1{,}2t^2) \text{ m}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\overrightarrow{r_{CM}}}{dt} = (0{,}9\,,\,0{,}6 + 2{,}4t) \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = (0\,,\,2{,}4) \text{ m/s}^2$$

b) **La posició, la velocitat i l'acceleració del centre de masses del sistema per a *t* = 2 s.**

$\vec{r}_{CM}\,(2) = (1{,}8 + 0{,}9 \cdot 2\,,\,0{,}6 \cdot 2 + 1{,}2 \cdot 2^2) = (3{,}6\,,\,6)$ m

$\vec{v}_{CM}\,(2) = (0{,}9\,,\,0{,}6 + 2{,}4 \cdot 2) = (0{,}9\,,\,5{,}4)$ m/s

$\vec{a}_{CM}\,(2) = (0\,,\,2{,}4)$ m/s^2

6. **Un cos de 3 kg de massa es mou al llarg d'una trajectòria donada per l'equació de moviment:**

$$\vec{r} = (3t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j}) \text{ m}$$

Calculeu la velocitat, la quantitat de moviment i el treball efectuat per la força que actua sobre aquest cos entre els instants de temps *t* = 1 s i *t* = 2 s.

$\vec{r} = 3t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$$

$\vec{p} = m\vec{v} = 3 \cdot (6t\,\vec{i} - 2\,\vec{j}) = 18t\,\vec{i} - 6\,\vec{j}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 18\,\vec{i}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}(1) &= 3\cdot 1^2\,\vec{i} - 2\cdot 1\,\vec{j} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}\\ \vec{r}(2) &= 3\cdot 2^2\,\vec{i} - 2\cdot 2\,\vec{j} = 12\,\vec{i} - 4\,\vec{j}\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(1) = 12\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} = 9\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$$

$$W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = 18\,\vec{i}\cdot(9\,\vec{i} - 2\,\vec{j}) = 18\cdot 9 - 2\cdot 0 = 162\ \text{J}$$

7. **Un cos està situat en la posició (1 , 1) i es desplaça fins a la posició (2 , 0) mitjançant una força que ve donada per l'expressió $\vec{F} = (3x\,,\, -2y)$ N. Calculeu el treball que fa aquesta força al llarg del segment que uneix els dos punts.**

$$W = \int_{(1\,,\,1)}^{(2\,,\,0)} (3x\,,\,-2y)\,dx\,dy = \int_1^2 3x\,dx - \int_1^0 2y\,dy = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 - \left[\frac{2y^2}{2}\right]_1^0 =$$

$$= \frac{3\cdot 2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} - \frac{3\cdot 1^2}{2} + \frac{\cancel{2}\cdot 1^2}{\cancel{2}} = 6 - \frac{3}{2} + 1 = 5{,}5\ \text{J}$$

8. **Un cos es mou horitzontalment sota l'acció de la força $F = t^3 + 2t - 1$. Si l'equació del moviment del cos és $x = t^2 + 1$, calculeu el treball fet per la força quan el cos es desplaça des de $x = 2$ m fins a $x = 10$ m.**

$$\vec{F} = t^3 + 2t - 1$$

$$x = t^2 + 1 \qquad x = 2\ \text{m} \qquad x = 10\ \text{m}$$

$$dx = 2t\,dt$$

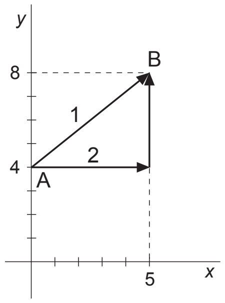
$$\left.\begin{aligned}&x = 2\ \text{m} \rightarrow x = t^2 + 1 \rightarrow t = \sqrt{x-1} = 1\ \text{s}\\ &x = 10\ \text{m} \rightarrow t = \sqrt{x-1} \rightarrow t = \sqrt{9} = 3\ \text{s}\end{aligned}\right\}$$

$$W = \int \vec{F}\,d\vec{r} = \int_1^3 (t^3 + 2t - 1)\,2t\,dt = \int_1^3 (2t^4 + 4t^2 - 2t)\,dt = \left[\frac{2t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} - \frac{2t^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{2\cdot 3^5}{5} + \frac{4\cdot 3^3}{3} - 3^2 - \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 1 = 97{,}2 + 36 - 9 - \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 1 = 123{,}47\ \text{J}$$

9. **Un cos es mou per l'acció de la força $\vec{F} = x\,\vec{i} + x\,\vec{j}$. Calculeu el treball exercitat per la força en traslladar el cos des del punt A (0 , 4) fins al punt B (5 , 8), si el desplaçament té lloc:**

a) **Pel camí 1 (fig. 4.20).**



$$W = \int_{(0\,,\,4)}^{(5\,,\,8)} (x\,\vec{i} + x\,\vec{j})\,dx\,dy$$

$$\left.\begin{aligned}&y = mx + b\\ &4 = m\cdot 0 + b \rightarrow b = 4\\ &8 = 5m + b \rightarrow 8 = 5m + 4 \rightarrow m = \frac{4}{5}\end{aligned}\right\}\ y = \frac{4}{5}x + 4 \rightarrow dy = \frac{4}{5}dx$$

$$W = \int_{(0\,,\,4)}^{(5\,,\,8)} (x\,\vec{i} + x\,\vec{j})\,dx\,dy = \int_0^5 x\,dx + \int_0^5 \frac{4}{5}\,x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 + \left[\frac{4}{5}\,\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{5^2}{2} + \frac{4\cdot 5^{\cancel{2}}}{\cancel{5}\cdot 2} =$$

$$= \frac{25 + 20}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5\ \text{J}$$

b) **Pel camí 2 (fig. 4.20).**

$$W = \underbrace{\int_0^5 x\,dx}_{\uparrow\; y = 4 \quad dy = 0} + \underbrace{\int_4^8 x\,dy}_{\uparrow\; x = 5 \quad dx = 0} = \int_0^5 x\,dx + \int_4^8 5\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 + [5y]_4^8 = \frac{25}{2} + 40 - 20 = 32{,}5 \text{ J}$$

c) **Raoneu si la força $\vec{F}$ és conservativa.**

10. **La força que actua sobre un projectil de 2 g de massa i 50 cm de longitud, mentre aquest és al canó, ve donada per l'expressió $\vec{F} = 180 - 360x$. Determineu la velocitat i l'energia cinètica a la sortida del canó.**

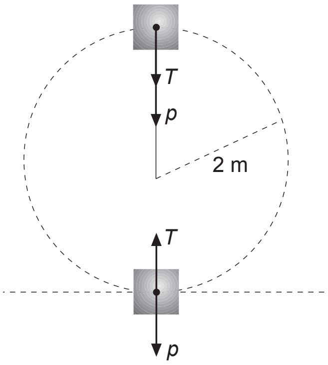
$$\vec{F} = 180 - 360x$$

$$W = \int_0^{0,5} (180 - 360x)\,dx = \left[180x - \frac{360x^2}{2}\right]_0^{0,5} = 180 \cdot 0{,}5 - 180 \cdot 0{,}5^2 = 45 \text{ J}$$

$$W = \Delta E_c = E_{cf} - E_{c0} = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{2 \cdot 10^{-3}}} = 212{,}13 \text{ m/s}$$

11. **Un cos de 50 g lligat a l'extrem d'un fil de 2 m descriu una trajectòria circular vertical. La velocitat al punt més alt de la trajectòria és de 10 m/s.**

a) **Dibuixeu totes les forces i calculeu la tensió del fil en el punt més alt.**



$v = 10$ m/s

$$\left.\begin{array}{l} E_p = mgh \\ E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_p = 0 \\ E_c = \frac{1}{2} m v^2 \end{array}\right\}$$

$$P + T = m\frac{v^2}{r}$$

$$T = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) = 0{,}05 \cdot \left(\frac{10^2}{2} - 9{,}8\right) = 2{,}01 \text{ N}$$

b) **Calculeu la velocitat del cos i la tensió del fil en el punt més baix.**

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gh$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{10^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 4} = 13{,}4 \text{ m/s}$$

$$T - p = m\frac{v^2}{r} \rightarrow T = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) = 0{,}05 \cdot \left(\frac{13{,}4^2}{2} + 9{,}8\right) = 4{,}95 \text{ N}$$

c) **Calculeu el treball fet per la tensió del fil durant una volta.**

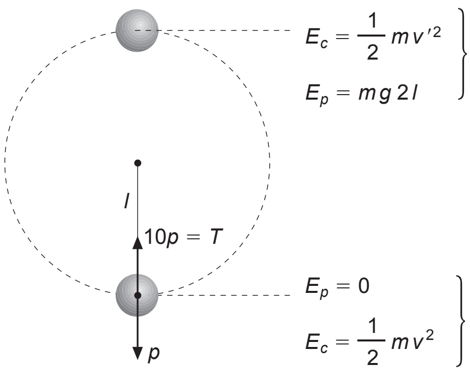
$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, ja que $\vec{F}$ i $\Delta\vec{r}$ són perpendiculars.

12. **Es fa girar en un pla vertical un cos que està enganxat a un fil d'1 m de longitud. Calculeu quina ha de ser la velocitat horitzontal que s'ha de comunicar a la corda en la posició més alta perquè la tensió de la corda en la posició més baixa sigui 10 vegades més gran que el pes.**

$$10\,p - p = m\frac{v^2}{r} \rightarrow 9\,p = m\frac{v^2}{r} \rightarrow 9\,m\,g = m\frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow 9\,g = \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{9\,g\,r} = \sqrt{9\cdot 9{,}8\cdot 1} = \sqrt{88{,}2} =$$

$$= 9{,}39 \text{ m/s}$$

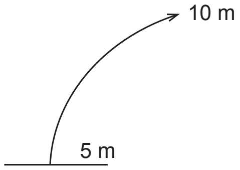


$$\left.\begin{array}{l}\text{Dalt: } E_c + E_p = \dfrac{1}{2}\,m\,v'^2 + m\,g\,2\,l \\[2ex] \text{Baix: } E_c + E_p = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2\end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v'^2 + \cancel{m}g\,2\,l = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \rightarrow v'^2 = 2\left(\frac{1}{2}\,v^2 - 2\,g\,l\right) \rightarrow$$

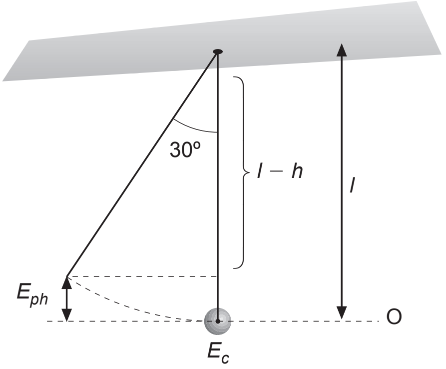
$$\rightarrow v' = \sqrt{v^2 - 4\,g\,l} = \sqrt{9{,}39^2 + 4\cdot 9{,}8\cdot 1} = \sqrt{49} = 7 \text{ m/s}$$

13. **Una vagoneta es desplaça per una muntanya russa. Quina velocitat ha de tenir quan es troba a 5 m de terra per arribar a un punt situat a 10 m de terra?**



$$\left.\begin{array}{r}E_p = m\,g\,h \\[1ex] \left.\begin{array}{l}E_{p0} = m\,g\,h_0 \\[1ex] E_{c0} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2\end{array}\right\}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\cancel{m}g\,h_0 + \dfrac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = \cancel{m}g\,h \\[2ex] 9{,}8\cdot 5 + \dfrac{1}{2}\,v_0^2 = 9{,}8\cdot 10 \\[2ex] v_0 = \sqrt{98} = 9{,}9 \text{ m/s}\end{array}$$

14. **Un pèndol de Foucault consisteix en un pèndol simple amb una longitud de 67 m i un angle de 30° respecte de la vertical. Calculeu amb quina velocitat passarà la bola per la seva posició d'equilibri (punt més baix). Suposeu-hi negligible la resistència de l'aire.**



$$\cos 30° = \frac{l - h}{l} \rightarrow h = l - l\cos 30° = l\,(1 - \cos 30°)$$

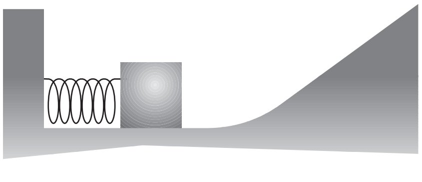
$$E_p = E_c$$

$$\cancel{m}g\,h = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$v = \sqrt{2\,g\,l\,(1 - \cos 30°)} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 67\cdot(1 - \cos 30°)} = 13{,}3 \text{ m/s}$$

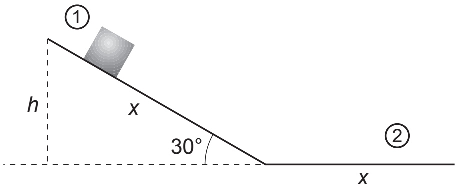
15. **Es comprimeix, amb un cos de 200 g de massa, 50 cm d'una molla que té una constant elàstica de 125 N/m i que és sobre un pla horitzontal, de manera que dispara aquest cos (fig. 4.21). Calculeu l'altura a què arriba el cos en el pla inclinat, si entre el cos i la superfície no hi actua el fregament.**



$$E_{pe} + E_{pq} \rightarrow \frac{1}{2}\,k\,x^2 = m\,g\,h$$

$$h = \frac{k\,x^2}{2\,m\,g} = \frac{125\cdot 0{,}5^2}{2\cdot 0{,}2\cdot 9{,}8} = 7{,}97 \text{ m}$$

16. **Un cos llisca per un pla inclinat que forma un angle de 30° amb l'horitzontal i continua movent-se per un pla horitzontal fins aturar-se. Determineu el coeficient de fregament dels plans, si la distància que ha recorregut el cos pel pla inclinat és la mateixa que pel pla horitzontal.**



$\Delta E = W_{fnc}$

① $\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \cancel{m}gh = -\mu\cancel{m}g\cos\alpha\,x$

$\sin 30° = \frac{h}{x} \rightarrow h = x\sin 30°$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}v^2 - gx\sin 30° = -\mu g\cos 30°\,x \\ \\ ② \quad -\frac{1}{2}mv^2 = -\mu mgx \rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \mu gx \end{array}\right\} \quad \mu\cancel{g}\cancel{x} - \cancel{g}\cancel{x}\sin 30° = -\mu\cancel{g}\cos 30°\cancel{x}$$

$\mu - \sin 30° = -\mu\cos 30° \rightarrow \mu = \frac{\sin 30°}{1 + \cos 30°} = 0{,}27$

17. **Un cos de 3 kg de massa cau des d'una certa altura amb una velocitat inicial de 2 m/s dirigida verticalment cap avall. Calculeu el treball fet durant 10 s contra les forces de resistència que suposem constants, si se sap que al final d'aquest temps el cos va a una velocitat de 50 m/s.**

$a_g + a_R = a_{\text{baixa}}$

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 + at \\ y = y_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \end{array}\right\} \quad -50 = -2 + a\cdot 10 \rightarrow a = \frac{-50+2}{10} = -4{,}8\text{ m/s}^2$$

$a_R = 9{,}8 - 4{,}8 = 5\text{ m/s}^2$

$y = y_0 = -2\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot 4{,}8\cdot 10^2 = -260\text{ m/s}^2$

$W = ma_Ry = 3\cdot 5\cdot 260 = 3\,900\text{ J}$

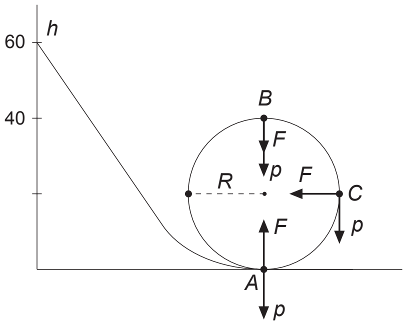
Per energies:

$\Delta E = -W \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = -W$

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 50^2 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2^2 - 3\cdot 9{,}8\cdot 260 = -3\,900\text{ J} = -W$

$W = 3\,900\text{ J}$

18. **Un cos llisca sense fregament des d'una altura de 60 m i efectua un ris de 20 m de radi (fig. 4.22). Calculeu la força que fa la superfície sobre el cos en els punts *A*, *B* i *C*.**



A: $\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \rightarrow v^2 = 2gh$

$F - p = m\frac{v^2}{R} \rightarrow F = mg + m\frac{v^2}{R} \rightarrow$

$\rightarrow F = mg + m\frac{2gh}{R} \rightarrow mg\left(1 + \frac{2\cdot 60}{R}\right) \rightarrow F = 7\,mg$

B: $\cancel{m}g h \rightarrow \cancel{m}g\, 2R + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \rightarrow v^2 = 2gh - 4g\,R = 2g\,60 - 4g\,20 = 120g - 80g = 40g$

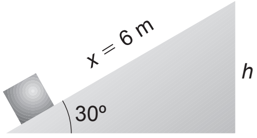
$$p + F = m\frac{v^2}{R} \rightarrow F = m\frac{v^2}{R} - mg \rightarrow F = m\frac{40\text{ g}}{R} - mg \rightarrow F = mg\left(\frac{40}{20} - 1\right) = mg$$

C: $F = m\dfrac{v^2}{R}$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \rightarrow v^2 = 2gh - 2g\,R = 2g\,60 - 2g\,20 = 80g$$

$$F = m\frac{80\,g}{R} = m\frac{80\,g}{20} = 4mg$$

19. **Un bloc de 5 kg és llançat cap amunt per un pla inclinat de 30° amb una velocitat de 10 m/s. Si recorre una distància de 6 m sobre la superfície inclinada del pla i després llisca cap avall fins al punt de partida, calculeu la força de fregament que actua sobre el bloc i la velocitat amb què el bloc torna a la posició inicial.**



$$\Delta E = -W_{fnc}$$

$$\sin 30° = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin 30°$$

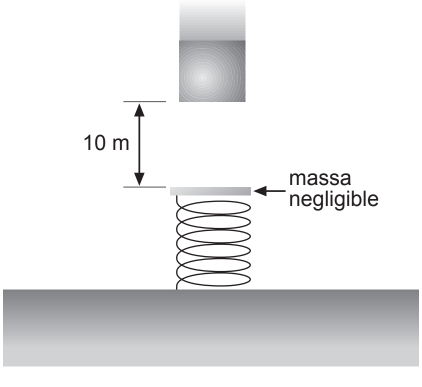
$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = -F_f\,x$$

$$mgx \sin 30° - \frac{1}{2}mv^2 = -F_f\,x$$

$$5 \cdot 9{,}8 \cdot 6 \cdot \sin 30° - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 = -F_f \cdot 6 \rightarrow F_f = 17{,}17 \text{ N}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = -F_f\,x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot v^2 - 5 \cdot 9{,}8 \cdot 6 \cdot \sin 30° = -17{,}17 \cdot 6 \rightarrow v = 4{,}19 \text{ m/s}$$

20. **Deixem caure un cos de 50 g sobre una molla que té una constant elàstica de 200 N/m. Si la distància entre el cos i la molla és de 10 m (fig. 4.23), calculeu la deformació de la molla.**



$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}05 \cdot 9{,}8 \cdot 10}{200}} \rightarrow x = 0{,}22 \text{ m}$$

21. **Un cos d'1,6 kg de massa està lligat a una molla que l'obliga a descriure un moviment harmònic simple donat per l'equació $x(t) = 0{,}03 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{10}\right)$, on x s'expressa en metres. Determineu l'energia cinètica i l'energia potencial del cos quan passa pel punt d'elongació $x = 2{,}2$ cm.**

$$x(t) = 0{,}03 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{10}\right)$$

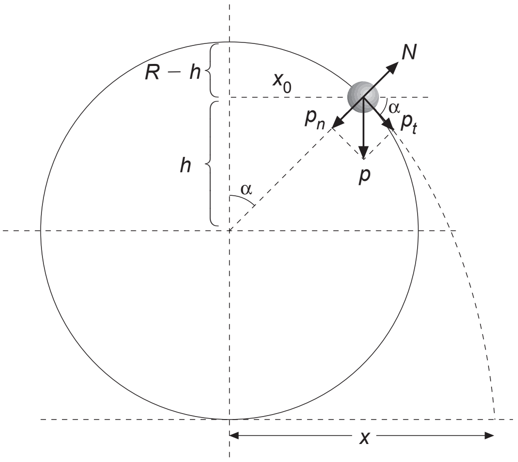
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 m = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot 1{,}6 = 0{,}44 \text{ N/m}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\,k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}44 \cdot 0{,}22^2 = 1{,}06 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

$$E_T = \frac{1}{2}\,k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}44 \cdot 0{,}03^2 = 1{,}98 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

$$E_c = E_T - E_p = 1{,}98 \cdot 10^{-4} - 1{,}06 \cdot 10^{-4} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

22. Una anella de radi *R* està fixada verticalment en el terra. De la part de dalt llisca sense fregament un cos. A quina distància del punt fixat amb el terra cau el cos?



$$\cos\alpha = \frac{h}{R}$$

$$p_n - N = m\,\frac{v^2}{R}$$

Punt on cau: $N = 0 \;\rightarrow$

$$P_n = m\,\frac{v^2}{R} \;\rightarrow\; p\cos\alpha = m\,\frac{v^2}{R} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \cancel{m} g\cos\alpha = \cancel{m}\,\frac{v^2}{R} \;\rightarrow\; g\,\frac{h}{\cancel{R}} = \frac{v^2}{\cancel{R}} \;\rightarrow\; v = \sqrt{g h}$$

Principi de conservació de l'energia:

Inici: $E_p = m g\, 2R$ Final: $E_p = m g\,(R + h)$

$E_c = 0$ $E_c = \frac{1}{2}\,m v^2$

$$\cancel{m} g\, 2R = \cancel{m} g\,(R + h) + \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 \;\rightarrow\; 2\cancel{g}R = \cancel{g}\,(R + h) + \frac{1}{2}\cancel{g} h \;\rightarrow\; 2R = R + h + \frac{h}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; R = \frac{3}{2}\,h \;\rightarrow\; h = \frac{2}{3}\,R$$

$$v = \sqrt{g h} = \sqrt{\frac{2}{3}\,g R}$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{R} = \frac{2}{3}\,\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}} = \frac{2}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{x_0}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{4}{9}R^2}}{R} = \frac{\sqrt{\cancel{R^2}\left(1 - \frac{4}{9}\right)}}{\cancel{R}} = \sqrt{\frac{9-4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x_0 = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{4}{9}R^2} = \sqrt{R^2\left(1 - \frac{4}{9}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,R = 0{,}74\,R$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + v_0\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\vec{a}\,\Delta t^2$$

$$\vec{r}_0 = (x_0\,,\,R + h) = \left(0{,}74\,R\,,\,R + \frac{2}{3}\,R\right) = \left(0{,}74\,R\,,\,\frac{5}{3}\,R\right) = (0{,}74\,R\,,\,1{,}67\,R)$$

$$\vec{v}_0 = (v\cos\alpha\,,\,-v\sin\alpha) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}Rg}\cdot\frac{2}{3}\,,\,-\sqrt{\frac{2}{3}Rg}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \left(\sqrt{\frac{8}{27}Rg}\,,\,-\sqrt{\frac{10}{27}Rg}\right) =$$
$$= (1{,}7\sqrt{R} - 1{,}9\sqrt{R})$$

$$\vec{a} = (0\,,\,-9{,}8)$$
$$t_0 = 0$$
$$\vec{r} = (0{,}74\,R\,,\,1{,}67\,R) + (1{,}7\sqrt{R} - 1{,}9\sqrt{R})\,t + \frac{1}{2}\cdot(0\,,\,-9{,}8)\,t^2$$

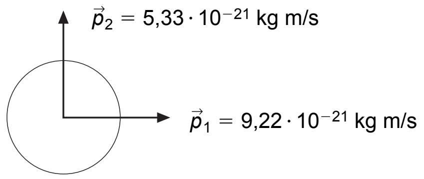
$$\left.\begin{array}{l} x = 0{,}74\,R + 1{,}7\sqrt{R}\,t \\ y = 1{,}67\,R - 1{,}9\sqrt{R}\,t - 4{,}9t^2 \end{array}\right\}$$

Si $y = 0 \rightarrow 4{,}9t^2 + 1{,}9\sqrt{R}\,t - 1{,}67R = 0$

$$t = \frac{-1{,}9\sqrt{R} \pm \sqrt{1{,}9^2\cdot(\sqrt{R})^2\cdot 4\cdot 1{,}67R\cdot 4{,}9}}{9{,}8} = \frac{-1{,}9\sqrt{R} \pm \sqrt{3{,}61\,R + 32{,}73\,R}}{9{,}8} =$$
$$= \frac{-1{,}9\sqrt{R} + 6{,}03\sqrt{R}}{9{,}8} = \frac{\sqrt{R}\,(6{,}03 - 1{,}9)}{9{,}8} = 0{,}42\sqrt{R}$$

$$x = 0{,}74\,R + 1{,}7\sqrt{R}\cdot 0{,}42\sqrt{R} = 0{,}74\,R + 0{,}716\,R = 1{,}46\,R$$

23. **Un nucli inicialment en repòs es descompon per radioactivitat i emet un electró amb una quantitat de moviment de $9{,}22\cdot 10^{-21}$ kg m/s i, perpendicularment a la direcció de l'electró, un neutrí amb una quantitat de moviment de $5{,}33\cdot 10^{-21}$ kg m/s. Determineu la direcció en què retrocedeix el nucli residual i la seva quantitat de moviment.**



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$

$$9{,}22\cdot 10^{-21}\,\vec{i} + 5{,}33\cdot 10^{-21}\,\vec{j} + \vec{p}_3 = 0$$

$$\vec{p}_3 = -9{,}22\cdot 10^{-21}\,\vec{i} - 5{,}33\cdot 10^{-21}\,\vec{j}$$

$$p_3 = \sqrt{(-9{,}22\cdot 10^{-21})^2 + (-5{,}33\cdot 10^{-21})^2} = 1{,}06\cdot 10^{-20}\ \text{kg m/s}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{5{,}33\cdot 10^{-21}}{9{,}22\cdot 10^{-21}} = 0{,}57 \rightarrow \alpha = 30{,}03°$$

Està en el tercer quadrant → 180° + 30° = 210°

24. **En una reacció química, dos àtoms *A* i *B* interaccionen i originen la molècula *AB.* L'àtom *A* es mou inicialment cap a la dreta amb una velocitat d'$1{,}1\cdot 10^5$ m/s i l'àtom *B* va cap amunt a $3\cdot 10^4$ m/s. Si la massa de *B* és 30 vegades superior a la de la massa *A*, calculeu la velocitat de la molècula resultant de la interacció d'ambdós àtoms.**

→ A $\quad \vec{v}_A = 1{,}1\cdot 10^5$ m/s $\quad m_B = 30\,m_A$

↑ B $\quad \vec{v}_B = 3\cdot 10^4$ m/s $\quad m_T = m_A + m_B = 31\,m_A$

$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_T$

$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_T \vec{v}$

$\cancel{m_A} \cdot 1{,}1 \cdot 10^5 \,\vec{\text{i}} + 30\cancel{m_A} \cdot 3 \cdot 10^4 \,\vec{\text{j}} = 31\cancel{m_A}\, \vec{v}$

$\vec{v} = (4\,516{,}13\,\vec{\text{i}} + 29\,032{,}26\,\vec{\text{j}})$ m/s

25. **Dos cotxes de 800 kg i 600 kg de massa respectivament es mouen en direccions perpendiculars. El primer, a una velocitat de 36 km/h, i el segon a 18 km/h. Els cotxes xoquen de manera totalment inelàstica. Calculeu:**

$\rightarrow \quad v_1 = 36$ km/h $= 10$ m/s

$\uparrow \quad v_2 = 18$ km/h $= 5$ m/s

a) **Els components del vector quantitat de moviment total abans i després del xoc.**

$\vec{p}_{\text{inicial}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 800 \cdot 10\,\vec{\text{i}} + 600 \cdot 5\,\vec{\text{j}} = 8\,000\,\vec{\text{i}} + 3\,000\,\vec{\text{j}}$

$\vec{p}_{\text{inicial}} = \vec{p}_{\text{final}}$

$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{8\,000^2 + 3\,000^2} = 8\,544$ kg m/s

$$\alpha = \text{tg}^{-1}\,\frac{3\,000}{8\,000} = 20{,}56°$$

b) **El vector velocitat del conjunt dels cotxes després del xoc.**

$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}$

$800 \cdot 10\,\vec{\text{i}} + 600 \cdot 5\,\vec{\text{j}} = 1\,400\,\vec{v}$

$\vec{v} = 5{,}71\,\vec{\text{i}} + 2{,}14\,\vec{\text{j}}$

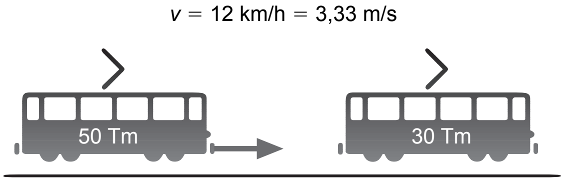
$v = \sqrt{5{,}71^2 + 2{,}14^2} = 6{,}1$ m/s

c) **L'energia que s'ha perdut en el xoc.**

$$\Delta E_c = E_{c\,\text{final}} - E_{c\,\text{final}} = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v^2 - \left(\frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2\right)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot 1\,400 \cdot 6{,}1^2 - \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 10^2 - \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 5^2 = 21\,471{,}41 \text{ J}$$

26. **Un vagó amb una massa de 50 Tm es mou a una velocitat de 12 km/h i xoca contra una plataforma amb una massa de 30 Tm que es troba en una via i s'enganxen. Calculeu:**



$\vec{p}_{\text{inicial}} = \vec{p}_{\text{final}}$

a) **La velocitat del moviment del conjunt just després del xoc.**

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\,v$

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{50\,000 \cdot 12}{50\,000 + 30\,000} = 7{,}5 \text{ km/h} = 2{,}08 \text{ m/s}$$

***b*)** **La distància recorreguda pel conjunt, si la força de fregament és igual al 5 % del pes.**

$$\Delta E = -W_{fnc} \rightarrow 0 - E_{ci} = -W_{fnc} \rightarrow \frac{1}{2} m_T v^2 = F_f x$$

$$F_f = 0{,}05 \cdot (m_1 + m_2)\, g = 0{,}05 \cdot 80\,000 \cdot 9{,}8 = 39\,200 \text{ N}$$

$$x = \frac{m_T v^2}{2 F_f} = \frac{80\,000 \cdot 2{,}08^2}{2 \cdot 39\,200} = 2{,}66 \text{ m}$$

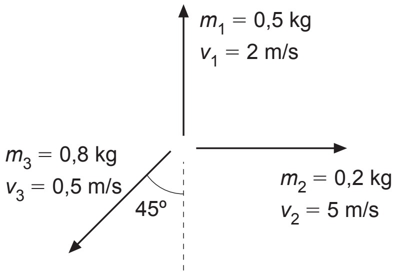
27. **Un nucli d'urani es desintegra en dos fragments de $2{,}5 \cdot 10^{-25}$ kg i $1{,}5 \cdot 10^{-25}$ kg. Determineu en quina relació estan les velocitats dels dos fragments en què es desintegra el nucli, si no tenim en compte altres partícules de masses negligibles.**

$$\vec{p}_{\text{inicial}} = \vec{p}_{\text{final}} \rightarrow 0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$0 = 2{,}5 \cdot 10^{-25}\, v_1 + 1{,}5 \cdot 10^{-25}\, v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{1{,}5 \cdot 10^{-25}}{2{,}5 \cdot 10^{-25}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

28. **Una bomba de 2 kg explota i es divideix en quatre fragments. Un, de 0,5 kg, surt a 2 m/s en sentit nord; un altre de 0,2 kg surt a 5 m/s en sentit est; el tercer, de 0,8 kg, va a 0,5 m/s en sentit sud-oest. Del quart fragment, trobeu-ne el mòdul, la direcció i el sentit de la velocitat.**



$$m_T = 2 \text{ kg}$$

$$m_T = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \rightarrow m_4 = 0{,}5 \text{ kg}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 = 0$$

$$\vec{v}_4 = -\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_4}$$

$$\vec{v}_4 = -\frac{0{,}5 \cdot 2\,\vec{j} + 0{,}2 \cdot 5\,\vec{i} + 0{,}8 \cdot (-0{,}5 \cdot \cos 45°\,\vec{i} - 0{,}5 \cdot \sin 45°\,\vec{j})}{0{,}5} =$$

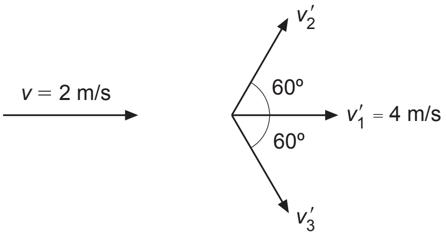
$$= -\frac{\vec{j} + \vec{i} - 0{,}28\,\vec{i} - 0{,}28\,\vec{j})}{0{,}5} = -1{,}44\,\vec{i} - 1{,}44\,\vec{j}$$

$$v_4 = \sqrt{1{,}44^2 + 1{,}44^2} = 2{,}04 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1}\frac{1{,}44}{1{,}44} = 45°$$

Està al tercer quadrant → $\alpha = 180° + 45° = 225°$

29. **Una granada es desplaça horitzontalment a 2 m/s, explota i es divideix en tres fragments de la mateixa massa. El primer segueix movent-se horitzontalment a 4 m/s. El segon forma un angle de 60° cap amunt amb la línia horitzontal inicial. El tercer va cap avall amb un angle de 60° amb la mateixa línia horitzontal. A quina velocitat es mouen els dos últims fragments?**



$$\vec{v} = 2\,\vec{i}$$

$$\vec{v}'_1 = 4\,\vec{i}$$

$$\vec{v}'_2 = v_2 \cos 60°\,\vec{i} + v_2 \sin 60°\,\vec{j} = 0{,}5\,v_2\,\vec{i} + 0{,}87\,v_2\,\vec{j}$$

$$\vec{v}'_3 = v_3 \cos 60°\,\vec{i} - v_3 \sin 60°\,\vec{j} = 0{,}5\,v_3\,\vec{i} - 0{,}87\,v_3\,\vec{j}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$3\cancel{m}\vec{v} = \cancel{m}\vec{v}_1 + \cancel{m}\vec{v}_2 + \cancel{m}\vec{v}_3 \rightarrow 3\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$3 \cdot 2\,\vec{i} = 4\,\vec{i} + (0{,}5\,v_2\,\vec{i} + 0{,}87\,v_2\,\vec{j}) + (0{,}5\,v_3\,\vec{i} - 0{,}87\,v_3\,\vec{j})$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 4 + 0{,}5\,v_2 + 0{,}5\,v_3 \\ 0 = 0{,}87\,v_2 - 0{,}87\,v_3 \end{array}\right\}$$

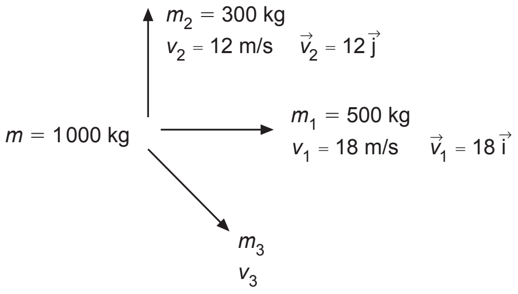
$$v_2 = v_3$$

$$2 = 0{,}5\,v_2 + 0{,}5\,v_2 \rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}\,'_2 = 0{,}5 \cdot 2\,\vec{i} + 0{,}87 \cdot 2\,\vec{j} = (\vec{i} + 1{,}74\,\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}\,'_3 = 0{,}5 \cdot 2\,\vec{i} - 0{,}87 \cdot 2\,\vec{j} = (\vec{i} - 1{,}74\,\vec{j}) \text{ m/s}$$

30. **S'ha de construir una carretera i es necessita dinamitar una roca de 1 000 kg, que surt projectada després de l'explosió en tres trossos. Un d'aquests trossos és de 500 kg i surt a una velocitat de 18 m/s, mentre que un altre tros de 300 kg surt amb una direcció perpendicular a l'anterior a 12 m/s. Trobeu la velocitat del tercer tros, així com la direcció en què surt disparat.**



$$m_3 = m - m_1 - m_2 = 1\,000 - 500 - 300 = 200 \text{ kg}$$

$$\vec{p}_{\text{inicial}} = \vec{p}_{\text{final}}$$

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \rightarrow 0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

$$0 = 500 \cdot 18\,\vec{i} + 300 \cdot 12\,\vec{j} + 200\,\vec{v}_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9\,000\,\vec{i} + 3\,600\,\vec{j} + 200\,\vec{v}_3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v}_3 = \frac{-9\,000\,\vec{i} - 3\,600\,\vec{j}}{200} = -45\,\vec{i} - 18\,\vec{j}$$

$$v_3 = \sqrt{(-45)^2 + (-18)^2} = 48{,}47 \text{ m/s}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{18}{45} = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 21{,}80°$$

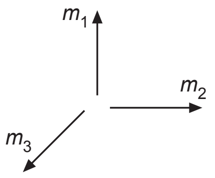
Està al tercer quadrant → $\alpha = 180° + 21{,}80° = 201{,}80°$

31. **Una granada de 4 kg, inicialment en repòs, explota en tres fragments. Dos d'ells tenen la mateixa massa i surten amb velocitats que tenen el mateix mòdul de 5 m/s, però direccions perpendiculars. El tercer tros té massa triple que cadascun dels altres dos. Calculeu:**

$m = 4$ kg

$m_1 = m_2$

$m_3 = 3\,m_1$



$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

$$4 = m_1 + m_1 + 3\,m_1 \rightarrow 4 = 5\,m_1 \rightarrow m_1 = \frac{4}{5} = 0{,}8 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0{,}8 \text{ kg}$$

$$m_3 = 2{,}4 \text{ kg}$$

a) **La quantitat de moviment de la granada abans i després de l'explosió.**

$$\vec{p}_i = 0$$

$$\vec{p}_f = 0$$

b) **La velocitat del tercer tros.**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1 = 5\,\vec{i} \\ \vec{v}_2 = 5\,\vec{j}\end{array}\right\}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0$$

$$0{,}8 \cdot 5\,\vec{i} + 0{,}8 \cdot 5\,\vec{j} + 2{,}4\,\vec{v}_3 = 0$$

$$4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2{,}4\,\vec{v}_3 = 0$$

$$\vec{v}_3 = \frac{-4\,\vec{i} - 4\,\vec{j}}{2{,}4} = -1{,}67\,\vec{i} - 1{,}67\,\vec{j}$$

$$v_3 = \sqrt{(-1{,}67)^2 + (-1{,}67)^2} = 2{,}36 \text{ m/s}$$

c) **L'energia mecànica de la granada generada com a conseqüencia de l'explosió.**

$$E_c = \frac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_2^2 + \frac{1}{2}\,m_3\,v_3^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}36^2 = 26{,}67 \text{ J}$$