Camp gravitatori

Qüestions

1. *a)* **Quina diferència hi ha entre la massa i el pes?**

Entenem la massa com la quantitat de matèria de què el cos està format, i sol ser invariable. El pes és la força amb què la Terra o un planeta atrau el cos. Quan la massa es mou a velocitats properes a la de la llum, aleshores la massa varia i cal tenir en compte els efectes relativistes.

b) **Pot ser que una persona no tingui massa?**

No, no és possible. Qualsevol cos té una certa massa.

c) **I pes? Justifiqueu les respostes.**

Una massa situada en un camp gravitatori nul no rep cap força i entenem que el seu pes és nul.

2. **Si la força s'expressa en N, la massa en g i la distància en cm, quin és el valor de la constant de gravitació universal *G*?**

Segons la llei de la gravitació universal, $F = G\,\dfrac{m\,m'}{r^2}$, la constant de gravitació universal, en el sistema internacional, pren el valor de $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg². En les unitats demanades, G val:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10^4\ \text{cm}^2}{1\ \text{m}^2} \cdot \frac{1\ \text{kg}^2}{10^6\ g^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{N}\cdot\text{cm}^2}{g^2}$$

3. **Observeu les superfícies equipotencials representades a la figura 5.50.**

En quin dels dos punts indicats, *A* o *B*, la intensitat de camp és més gran? Justifiqueu la resposta.

La relació entre el camp gravitatori i el potencial ve donada per l'expressió $\dfrac{dV}{d\vec{r}} = -\vec{g}$.

Com que per una distància r determinada, en A hi ha més variació de potencial que en B, ja que hi ha més densitat de línies equipotencials, aleshores deduïm que la intensitat de camp gravitatori és més gran en A que en B.

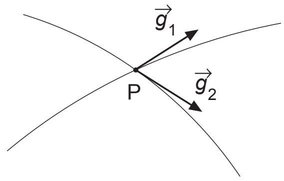
4. **Pot ser nul el potencial en un punt i no ser-ho la intensitat de camp? Raoneu la resposta amb un exemple.**

En el cas del camp gravitatori, el potencial en un punt és nul quan es troba a una distància infinita de la massa, i, en aquesta situació, el camp gravitatori també és nul. Les expressions següents justifiquen aquesta conclusió:

$$\left.\begin{aligned} g &= G\,\frac{m}{r^2} \\ V &= -G\,\frac{m}{r} \end{aligned}\right\}$$

Per tant, no és possible que es doni la situació de la qüestió.

5. **Es poden tallar dues línies de camp gravitatori?**

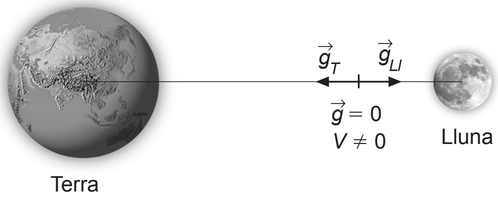


No és pòssible.

En la figura hem suposat que dues línies de camp es tallen en un punt *P*. En aquesta situació, en *P* tindríem dues intensitats diferents que actuen sobre el mateix cos.

6. **Pot ser nul·la la intensitat de camp en un punt i no ser-ho el potencial? Raoneu la resposta amb un exemple.**

Sí que és possible. Considerem, per exemple, la Terra i la Lluna.



Si negligim els efectes dels altres astres, podem considerar, segons indica la figura, un punt del segment que uneix la Terra i la Lluna on $\vec{g} = 0$ i $V \neq 0$.

7. **A la Lluna, un bloc pesa 50 N. Pesa igual a la Terra? La massa varia d'un lloc a l'altre?**

No. A la Terra pesa més ja que la gravetat és més gran.

Si no tenim en compte els efectes relativistes, la massa és invariable.

8. **Suposeu que aterreu en un planeta que té la mateixa densitat que la Terra, però un radi 5 vegades més gran. Quant pesaríeu en aquest planeta en comparació amb el que peseu a la Terra?**

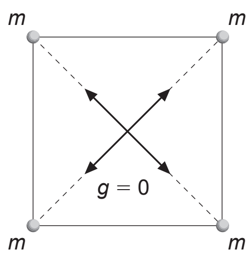
Suposem que R és el radi de la Terra, i ρ la seva densitat. En mòdul, el meu pes a la Terra seria:

$$p_{\text{Terra}} = G\,\frac{Mm}{R^2} = G\,\frac{\frac{4}{3}\,\pi R^3 \rho\, m}{R^2} = \frac{4}{3}\,G\pi\rho m R$$

En un planeta de la mateixa densitat i radi 5R, el meu pes seria:

$$p_{\text{planeta}} = G\,\frac{Mm}{R^2} = G\,\frac{\frac{4}{3}\,\pi (5R)^3 \rho\, m}{R^2} = 5 \cdot \frac{4}{3}\,G\pi\rho m R = 5\,p_{\text{Terra}}$$

9. **Quin és el camp gravitatori al centre d'un quadrat si en els vèrtexs hi ha quatre cossos de la mateixa massa *m*?**



Per simetria, observem que el camp gravitatori és nul i no ho seria el potencial.

10. **Quin és el període d'un asteroide que gira al voltant del Sol amb un radi d'òrbita tres vegades més gran que el de la Terra?**

Sabem que el període de rotació de la Terra al voltant del Sol és aproximadament de 365 dies. Com que la Terra i l'asteroide giren al voltant del Sol, la constant de la tercera llei de Kepler és la mateixa i, per tant:

$$T^2 = k\,r^3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} 365^2 = k\,R_T^3 \\ T^2 = k\,(3\,R_T)^3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{365^2}{T^2} = \frac{R_T^3}{27\,R_T^3} \rightarrow T = 365 \cdot \sqrt{27} = 1\,896{,}6 \text{ dies}$$

11. **Quan un coet cau cap a la Terra, l'energia potencial augmenta o disminueix? I l'energia cinètica?**

L'energia potencial entre dos cossos és:

$$E_p = -G\,\frac{m\,m'}{r}$$

Si suposem que negligim el fregament de l'atmosfera, tenim un sistema conservatiu.

Si el coet cau cap a la Terra, l'energia potencial disminueix i, en conseqüència, l'energia cinètica augmenta.

12. **Un pèndol funciona com a rellotge. Quan s'allunya de la Terra, s'avança o s'endarrereix?**

En augmentar la distància a la Terra, la intensitat del camp gravitatori disminueix. Tenint en compte l'expressió que relaciona el període amb la intensitat de camp gravitatori i la longitud d'un pèndol senzill:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Veiem que en disminuir la intensitat de camp augmenta el període i, per tant, com a rellotge s'endarrereix.

13. **Quan un satèl·lit disminueix el radi d'òrbita entorn d'un planeta, la velocitat augmenta o disminueix? Raoneu la resposta.**

Com hem comentat en la qüestió 11, l'apropament del satèl·lit cap al planeta implica una disminució de l'energia potencial i, en conseqüència, un augment de l'energia cinètica. Suposem que negligim el fregament i, per tant, considerem el sistema conservatiu.

14. **Quan un satèl·lit augmenta el radi d'òrbita al voltant de la Terra, el període augmenta o disminueix? Raoneu la resposta.**

Considerem la llei de Kepler, $T^2 = K\,r^3$. En augmentar el radi, augmenta el període seguint la condició següent:

$$T = \sqrt{K\,r^3}$$

15. **Què li succeeix a un satèl·lit artificial quan gira al voltant de la Terra si posa momentàniament en funcionament un dels coets per augmentar la velocitat en sentit tangencial?**

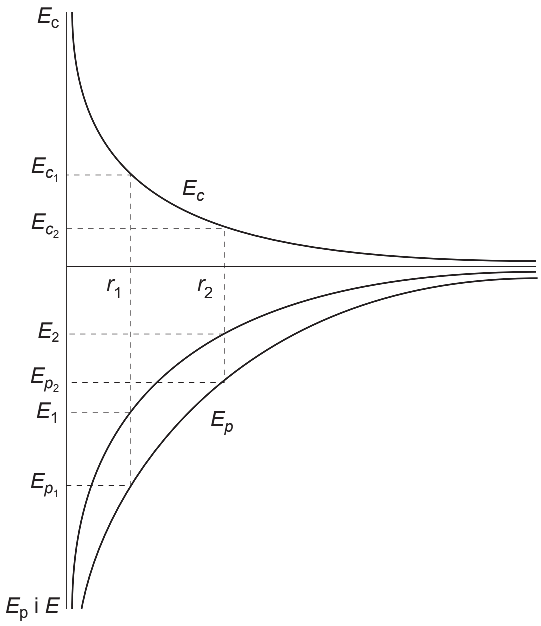
Suposem que inicialment, el satèl·lit té una energia mecànica E_1, de manera que l'energia cinètica i el potencial compleixen la relació:

$$E_1 = E_{c1} + E_{p1}$$

L'activació del coet farà augmentar l'energia mecànica a un valor més alt, E_2:

$$E_2 = E_{c2} + E_{p2}$$

En la figura observem que l'energia cinètica disminueix i que l'energia potencial augmenta.



16. **Si l'energia d'un cos és de *E* = 1 200 J i suposem que està en un camp conservatiu, pot ser que en un instant determinat l'energia potencial sigui −1 000 J? I 1 400 J? Raoneu la resposta.**

Si el camp és conservatiu, entenem que el principi de conservació de l'energia és:

$E = E_c + E_p =$ constant

Quan el cos té una energia potencial de 1 000 J, l'energia cinètica és:

$E_c = E - E_p = 1200 - 1000 = 200$ J

Quan el cos té una energia potencial de 1 400 J, l'energia cinètica és:

$E_c = E - E_p = 1200 - 1400 = -200$ J

Aquest últim cas no és possible, ja que l'energia cinètica no pot ser negativa.

17. **Considerem un meteorit que procedeix de l'espai interestel·lar i que inicia la caiguda sobre la Terra sense energia cinètica. Amb quina velocitat incidiria sobre la seva superfície si no existís fregament amb l'atmosfera?**

Podem considerar que el meteorit té una energia mecànica zero en l'espai interestel·lar. En arribar a la superfície de la Terra, tenim que:

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{R_T} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T}}$$

que és, justament, la velocitat d'escapament.

18. **Si aproximem dues masses, l'energia potencial augmenta o disminueix?**

L'energia potencial entre dues masses és:

$$E_p = -G \frac{m m'}{r}$$

D'on es dedueix que en disminuir la distància entre les masses, disminueix l'energia potencial.

19. **Si la densitat de la Terra augmentés sense que en variés el radi, la velocitat d'escapament hauria de ser més gran o més petita?**

Si augmentés la densitat, augmentaria la massa de la Terra. Per tant, la velocitat d'escapament hauria de ser més gran, segons indica l'expressió següent:

$$v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_T}}$$

20. **Quan un satèl·lit disminueix la seva energia cinètica, tendeix a apropar-se a la Terra o a allunyar-se'n?**

Si disminueix l'energia cinètica, ha d'augmentar l'energia potencial, ja que suposem que el camp és conservatiu.

De l'expressió de l'energia potencial, $E_p = -G\,\dfrac{m\,m'}{r}$, tenim que la distància ha d'augmentar.

21. **Si llancem un cos cap amunt amb la mateixa velocitat a la superfície de la Terra i a la superfície de la Lluna, assoleixen la mateixa altura?**

De l'expressió del camp gravitatori, $g = G\,\dfrac{M}{R^2}$, es demostra que la intensitat del camp gravitatori de la Terra és més gran que el de la Lluna. Per tant, en llançar un cos verticalment cap amunt, a la Lluna assoleix més altura que a la Terra.

22. **Un pèndol de rellotge funciona correctament a la Terra. Si el portem a la Lluna, funcionarà correctament?**

No, ja que com hem comentat en la qüestió anterior, la intensitat de camp a la Lluna és menor que a la Terra.

El període d'un pèndol és:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Per tant, a la Lluna el pèndol del rellotge s'endarrereix.

Problemes

1. **Quin és el període del moviment de rotació de la Terra al voltant del Sol si suposem que la trajectòria és circular i que aquests cossos estan aïllats de la resta de l'Univers?**

Dades: $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ **kg i** $r_{ST} = 1{,}495 \cdot 10^{11}$ **m**

En girar la Terra al voltant del Sol, la força centrípeta ha d'igualar la força gravitatòria:

$$m_T\,\omega^2\,r = G\,\frac{m_T\,M_s}{r^2} \;\rightarrow\; \omega^2 = G\,\frac{M_s}{r^3}$$

Tenint en compte que la velocitat angular es pot posar en funció del període, tenim que:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} \;\rightarrow\; T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{G\,\dfrac{M_s}{r^3}}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{1{,}99 \cdot 10^{30}}{(1{,}495 \cdot 10^{11})^3}}} = 365 \text{ dies}$$

2. **A quina distància del centre de la Terra una massa d'1 kg pesa 1 N?**

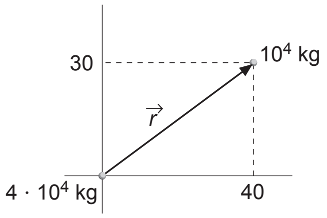
Dades: $\boldsymbol{M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}}$ **kg**

Apliquem la llei de la gravitació universal en mòdul:

$$F = G\,\frac{Mm}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{GMm}{F}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1}{1}} = 1{,}997 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Si el radi de la Terra és $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, correspondria aproximadament a 3 vegades el radi terrestre.

3. **Calculeu la força, en mòdul i vectorialment, que rep un cos de massa 10 000 kg situat al punt (40 , 30), quan a l'origen hi ha una massa de 40 000 kg.**



Determinem el radi de posició de la massa de 10^4 kg respecte de l'origen de coordenades:

$$\vec{r} = (40\ ,\ 30) \rightarrow r = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ \text{m}$$

Apliquem la llei de la gravitació universal:

$$\vec{F} = -G\,\frac{Mm}{r^2}\,\vec{u} \rightarrow \vec{F} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^4 \cdot 4 \cdot 10^4}{50^2} \cdot \frac{(40\ ,\ 30)}{50} =$$

$$= (-8{,}54 \cdot 10^{-6}\,\vec{i} - 6{,}403 \cdot 10^{-6}\,\vec{j})\ \text{N}$$

En mòdul:

$$F = \sqrt{(-8{,}54 \cdot 10^{-6})^2 + (-6{,}40 \cdot 10^{-6})^2} = 1{,}067 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

4. **Dues esferes idèntiques estan separades una distància de 100 m des dels centres de massa i s'atrauen amb una força gravitatòria d'1 N. Quina és la massa de cada esfera?**

Apliquem la llei de la gravitació universal en mòdul:

$$F = G\,\frac{Mm}{r^2} \rightarrow 1 = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^2}{100^2} \rightarrow m = 1{,}22 \cdot 10^7\ \text{kg}$$

5. **Calculeu la intensitat de camp gravitatori que genera el Sol a la seva superfície. Quant pesaria una massa de 5 kg a la superfície del Sol?**

Dades: $\boldsymbol{M_S = 1{,}98 \cdot 10^{30}}$ **kg,** $\boldsymbol{R_S = 6{,}96 \cdot 10^8}$ **m**

Determinem en mòdul la intensitat del camp gravitatori a la superfície del Sol:

$$g = G\,\frac{M}{R^2} \rightarrow g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}}{(6{,}96 \cdot 10^8)^2} = 274\ \text{m/s}^2$$

El pes, en mòdul, d'una massa de 5 kg seria:

$$p = mg = 5 \cdot 274 = 1370\ \text{N}$$

6. **El període de revolució de la Lluna al voltant de la Terra és de 27,31 dies, amb un radi de $3{,}84 \cdot 10^8$ m. Calculeu la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Terra.**

Dades: $R_T = 6\,370$ km

En girar la Lluna al voltant de la Terra, la força centrípeta ha d'igualar la força gravitatòria:

$$m_L \omega^2 r = G \frac{m_L M_T}{r^2} \rightarrow \omega^2 = G \frac{M_T}{r^3}$$

Tenint en compte que la velocitat angular es pot posar en funció del període, tenim que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{G \frac{M_T}{r^3}}} \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{M_T}{(3{,}84 \cdot 10^8)^3}}} = 27{,}31 \cdot 24 \cdot 3\,600$$

Però la intensitat de camp a la superfície de la Terra és, en mòdul:

$$g = G \frac{M}{R_T^2}$$

Combinant amb l'expressió anterior:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{M_T}{(3{,}84 \cdot 10^8)^3} \cdot \frac{R_T^2}{R_T^2}}} = 27{,}31 \cdot 24 \cdot 3\,600$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{(3{,}84 \cdot 10^8)^3} \cdot R_T^2}} = 27{,}31 \cdot 24 \cdot 3\,600 \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{(3{,}84 \cdot 10^8)^3} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2}} = 27{,}31 \cdot 24 \cdot 3\,600$$

$$g = \frac{(2\pi)^2 \cdot (3{,}84 \cdot 10^8)^3}{(27{,}31 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

7. **Si l'acceleració de la gravetat a la superfície de Mart és 3,7 m/s² i el seu diàmetre és de $6{,}8 \cdot 10^6$ m, quina és la seva massa?**

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori a la superfície de Mart és:

$$g = G \frac{M}{R_M^2} \rightarrow 3{,}7 = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{M}{(3{,}4 \cdot 10^6)^2} \rightarrow M = 6{,}41 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

8. **Determineu la intensitat de camp g de la Terra a dos radis terrestres ($2\,R_T$) d'alçada sabent que la g_0 en la superfície de la Terra és 9,8 m/s².**

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Terra és:

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \rightarrow g = G \frac{M}{(3 R_T)^2} \cdot \frac{R_T^2}{R_T^2} = \frac{g_0}{(3 R_T)^2} \cdot R_T^2 = \frac{g_0}{9} = \frac{9{,}8}{9} = 1{,}09 \text{ m/s}^2$$

9. **Un cos pesa 12 N en la superfície d'un planeta de massa 10^{23} kg i de radi 10^6 m. Calculeu quant pesa en la superfície de la Terra ($g_0 = 9{,}8$ m/s²).**

Apliquem la llei de la gravitació universal en mòdul:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \rightarrow 12 = G \frac{m \cdot 10^{23}}{(10^6)^2} \rightarrow m = 1{,}799 \text{ kg}$$

A la superfície de la Terra, el pes seria:

$$p = mg = 1{,}799 \cdot 9{,}8 = 17{,}63 \text{ N}$$

10. **Llancem un cos de massa 8 kg des de la superfície de la Lluna amb una velocitat inicial de 20 m/s.**

Calculeu l'alçada màxima, el temps d'anada i tornada, i l'energia cinètica quan ha pujat 100 m.

Dades: $M_{LL} = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg, $R_{LL} = 1{,}74 \cdot 10^{6}$ m

Amb les dades que tenim, podem calcular la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Lluna:

$$g = G\,\frac{M}{r^2} = G \cdot \frac{7{,}34 \cdot 10^{22}}{(1{,}74 \cdot 10^{6})^2} = 1{,}617 \text{ m/s}^2$$

Com que la velocitat de llançament del cos és petita, podem considerar que la intensitat de camp gravitatori és pràcticament constant. Aleshores, es tracta d'un moviment uniformement variat. Calculem l'alçada màxima:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,x \;\rightarrow\; 0 = 20^2 - 2 \cdot 1{,}62 \cdot x \;\rightarrow\; x = 123{,}5 \text{ m}$$

Calculem el temps d'anada i tornada:

$$v = v_0 + g\,t \;\rightarrow\; t = \frac{20}{1{,}62} \cdot 2 = 24{,}7 \text{ s}$$

Calculem, fent plantejaments energètics, l'energia cinètica:

$$E_c = E_c{'} + E_p{'} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20^2 = E_c{'} + 8 \cdot 1{,}617 \cdot 100 \;\rightarrow\; E_c{'} = 306 \text{ J}$$

11. **Si la densitat de la Terra es tripliqués sense variar el radi, quin seria el valor de *g* a la superfície de la Terra?**

A la superfície de la Terra, la intensitat de camp gravitatori és en mòdul:

$$g_0 = G\,\frac{M}{R_T^2} = G\,\frac{\rho_0\,\frac{4}{3}\,\pi\,R_T^3}{R_T^2} = G\,\rho_0\,\frac{4}{3}\,\pi\,R_T$$

Si la densitat fos el triple, el camp gravitatori valdria:

$$g = G\,(3\,\rho_0)\,4\,\pi\,R_T = 3\,g_0 = 3 \cdot 9{,}8 = 29{,}4 \text{ m/s}^2$$

12. **Si la densitat mitjana de la Terra fos el doble que la que té ara, quin seria el valor de *g* a la superfície de la Terra si la massa no variés?**

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Terra és:

$$g_0 = G\,\frac{M}{R_T^2} = G\,\frac{\rho_0\,\frac{4}{3}\,\pi\,R_T^3}{R_T^2} = G\,\rho_0\,\frac{4}{3}\,\pi\,R_T$$

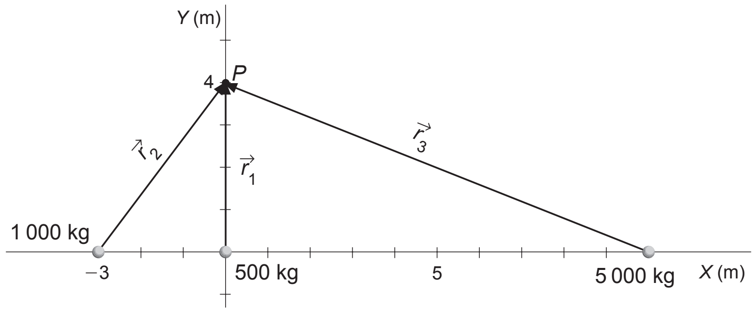
Si la massa és la mateixa, la relació entre la densitat i el radi ha de complir:

$$\rho_0\,\frac{4}{3}\,\pi\,(R_T)^3 = 2\,\rho_0\,\frac{4}{3}\,\pi\,R^3 \;\rightarrow\; R = \frac{R_T}{\sqrt[3]{2}}$$

Per tant, en aquest cas, el valor de la gravetat seria:

$$g = G\,\frac{M}{\left(\frac{R_T}{\sqrt[3]{2}}\right)^2} = \sqrt[3]{4}\,g_0 = 15{,}5 \text{ m/s}^2$$

13. Calculeu el camp gravitatori creat en el punt *P* per la distribució de masses representades en la figura 5.51.



Els vectors de posició de les masses són:

$\vec{r}_1 = 4\,\vec{j} \rightarrow r_1 = 4$

$\vec{r}_2 = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} \rightarrow r_2 = 5$

$\vec{r}_3 = 10\,\vec{i} + 4\,\vec{j} \rightarrow r_3 = \sqrt{116}$

La intensitat de camp gravitatori de la distribució de masses ve donada per l'expressió:

$$\vec{g} = \sum G\,\frac{M_i}{r_i^2}$$

$$\vec{g} = -G\left(\frac{500}{4^2}\,\vec{j} + \frac{1000}{5^2}\cdot\frac{(3\,\vec{i} + 4\,\vec{j})}{5} + \frac{5000}{(\sqrt{116})^2}\cdot\frac{(10\,\vec{i} + 4\,\vec{j})}{\sqrt{116}}\right) = 1{,}07\cdot 10^{-9}\,\vec{i} - 5{,}29\cdot 10^{-9}\,\vec{j}$$

14. El radi d'un planeta és *m* vegades més gran que el de la Terra i la seva densitat és *n* vegades més gran que la de la Terra. Quina és l'acceleració de la gravetat a la superfície del planeta?

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori d'un planeta és:

$$g = G\,\frac{M}{R^2} = G\,\frac{n\rho_0\,\frac{4}{3}\,\pi\,(m R_T)^3}{(m R_T)^2} = m\,n\,g_0$$

15. Un cos pesa 49 N a la superfície de la Terra i 5 N a una alçada determinada de la superfície. Calculeu la massa del cos i l'alçada.

Dades: $R_T = 6{,}38\cdot 10^6$ m i $g_0 = 9{,}8$ m/s^2

La variació de la intensitat gravitatòria terrestre amb l'altura és:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Si multipliquem per la massa:

$$\frac{m\,g}{m\,g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Substituint valors, obtenim que $m = 5$ kg i $h = 1{,}359\cdot 10^7$ m $= 2{,}13\ R_T$

16. *a)* Calculeu el potencial en la superfície d'una massa esfèrica de valor 1 000 kg i de densitat $\rho = 7{,}8$ g/cm^3.

Prèviament, determinem el radi del cos esfèric:

$$M = \rho V \rightarrow 10^3 = 7{,}8\cdot 10^3\ V \rightarrow V = 0{,}1282\ \text{m}^3$$

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \rightarrow 0{,}1282 = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \rightarrow r = 0{,}3128\ \text{m}$$

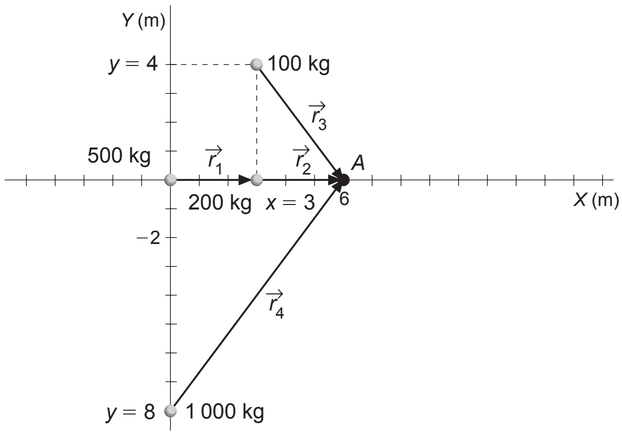
El potencial a la superfície de l'esfera és:

$$V = -G\,\frac{m}{r} = -G\cdot\frac{10^3}{0{,}3128} = -2{,}13\cdot 10^{-7}\ \text{J/kg}$$

b) **En quin punt el potencial és màxim?**

A una distància molt gran de l'esfera, el potencial tendeix a zero. Per tant, a una distància infinita, el valor és nul.

17. **Calculeu el potencial i la intensitat de camp gravitatori en el punt *A* creat per una distribució de masses com la representada en la figura 5.52.**



Prèviament, calculem els vectors de posició de les masses respecte del punt *A*:

$\vec{r}_1 = 6\,\vec{i} \rightarrow r_1 = 6$

$\vec{r}_2 = 3\,\vec{i} \rightarrow r_2 = 3$

$\vec{r}_3 = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} \rightarrow r_3 = 5$

$\vec{r}_4 = 6\,\vec{i} + 8\,\vec{j} \rightarrow r_4 = 10$

El potencial en *A* de la distribució de masses és:

$$V = -G\left(\frac{500}{6} + \frac{200}{3} + \frac{100}{5} + \frac{1000}{10}\right) = -1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{J/kg}$$

Calculem la intensitat de camp gravitatori:

$$\vec{g} = -G\left(\frac{500}{36}\,\vec{i} + \frac{200}{9}\,\vec{i} + \frac{100}{25}\cdot\frac{(3\,\vec{i} - 4\,\vec{j})}{5} + \frac{1000}{10}\cdot\frac{(6\,\vec{i} + 8\,\vec{j})}{10}\right) =$$

$$= (-2{,}97\cdot 10^{-9}\,\vec{i} - 3{,}2\cdot 10^{-10}\,\vec{j})\ \text{m/s}^2$$

18. **Quina és l'energia necessària per portar una massa de 40 kg des de la superfície de la Terra fins a: Dades: $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m i $g_0 = 9{,}81$ m/s^2**

a) **100 m d'alçada.**

Com que es tracta d'una alçada petita, podem considerar que la intensitat de la gravetat és gairebé constant i de valor $g_0 = 9{,}8$ m/s^2. El treball necessari per portar-la a una alçada de 1000 m és:

$$W_{\text{forces externes}} = \Delta E_p = m\,g\,h = 40 \cdot 9{,}8 \cdot 10^3 = 3{,}92 \cdot 10^4\ \text{J}$$

b) **1 000 km d'alçada.**

Quan les distàncies són grans, hem de tenir en compte la variació de la intensitat de camp gravitatori. Apliquem el principi de conservació de l'energia mecànica:

$$W_{\text{forces externes}} = \Delta E_p = -G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right)$$

Tenint en compte que $g_0 = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2}$, podem escriure l'expressió anterior d'aquesta manera:

$$W_{\text{forces externes}} = -G\,M_T\,m\,\frac{R_T^2}{R_T^2}\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) = -g_0\,m\,R_T^2\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) = 3{,}39 \cdot 10^8\ \text{J}$$

19. **Un cos es troba a 500 km d'alçada. Si el deixem anar lliurement, amb quina velocitat impacta a la superfície de la Terra, si negligim el fregament amb l'aire?**

Dades: $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m, $g_0 = 9{,}8$ m/s^2

Plantegem la situació de la mateixa manera que en l'apartat *b*) del problema anterior:

$$E_p = E_p' + E_c'$$

$$-G M_T m \left(\frac{1}{R_T + h}\right) = -G M_T m \frac{1}{R_T} + \frac{1}{2} m v^2$$

Simplificant i tenint en compte que $g_0 = G \dfrac{M_T}{R_T^2}$, podem escriure el resultat anterior de la manera següent:

$$-g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{R_T + h}\right) = -g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{R_T}\right) + \frac{1}{2} v^2$$

Substituint valors, obtenim que $v = 3{,}015 \cdot 10^3$ m/s.

20. **Un cos celeste de radi 1 km i densitat 7,5 g/cm^3 es mou en l'espai interestel·lar on *g* és zero. Quina és la velocitat d'escapament d'un cos que es troba a la superfície del meteorit?**

Recordem que la velocitat d'escapament d'un cos celeste és:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$$

Tenint en compte que $m = \rho V = \rho \dfrac{4}{3} \pi r^3$, la velocitat d'escapament es pot escriure com:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = r \sqrt{\frac{8}{3} G \rho \pi} = 2{,}047 \text{ m/s}$$

21. **El Meteosat és un satèl·lit geoestacionari, és a dir, que gira en el pla equatorial amb la mateixa velocitat angular que la Terra. A quina distància de la superfície es troba?**

Calculem la velocitat angular de la Terra, que és la mateixa que la del satèl·lit:

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ dia}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3\,600} = 7{,}2722 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

En girar el satèl·lit al voltant de la Terra, la força centrípeta ha d'igualar la força gravitatòria:

$$m \omega^2 r = G \frac{m M_T}{r^2} \rightarrow \omega^2 = G \frac{M_T}{r^3} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{\omega^2}} = 4{,}225 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Per tant, l'altura on es troba el satèl·lit és:

$$h = r - R_T = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{\omega^2}} - R_T = 4{,}225 \cdot 10^7 - 6{,}38 \cdot 10^6 = 3{,}6 \cdot 10^7 \text{ m}$$

22. **Un satèl·lit de massa 250 kg gira en una òrbita geoestacionària**

Dades: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m

Calculeu:

a) **La velocitat del satèl·lit.**

En el problema anterior hem deduït que $\omega^2 = G \dfrac{M_T}{r^3}$.

Si tenim en compte que $v = \omega r \rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}}$.

Substituint valors:

$$v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = 3{,}07 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) **El radi de l'òrbita.**

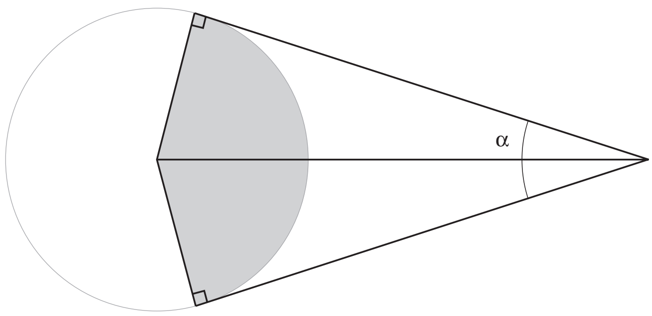
El radi de l'òrbita és el que hem trobat en el problema anterior:

$r = 4{,}225 \cdot 10^7$ m

c) **L'angle amb què es veu la Terra des del satèl·lit.**

Si observem la figura, l'angle d'observació és:

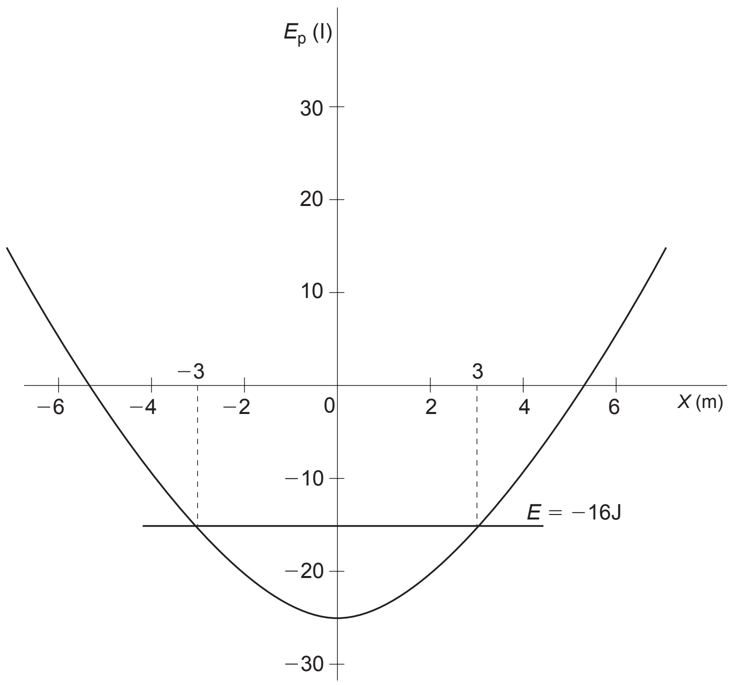
$$\alpha = 2 \text{ arc sin } \frac{6{,}38 \cdot 10^6}{4{,}225 \cdot 10^7} = 17° \ 22'$$



23. **Un cos de massa 0,5 kg és sotmès a un camp d'energia potencial gravitatòria $E_p = (x^2 - 25)$ J. Calculeu:**

a) **Si la massa té una energia mecànica de −16 J, en quin interval es pot moure?**

Representem gràficament l'energia potencial en funció de la distància i establim un nivell d'energia mecànica de −16 J:



Observem que l'interval de moviment correspon amb la condició:

$$\left.\begin{array}{l} E = x^2 - 25 \\ E = -16 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 25 = -16 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \text{ m} \rightarrow [-3\,,\,3]$$

b) **Quina és la velocitat màxima i en quin punt es dóna aquesta velocitat?**

La velocitat màxima tindrà lloc quan passi per l'origen de coordenades, ja que l'energia potencial és mínima i, per tant, l'energia cinètica és màxima:

$$E = E_c + E_p \rightarrow -16 = -25 + E_c \rightarrow E_c = 9 \text{ J}$$

Que correspon a una velocitat de:

$$9 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot v^2 \rightarrow v = 6 \text{ m/s}$$

24. Dues masses de 100 kg i 500 kg estan separades una distància de 10 m. Si separem la massa de 500 kg fins a 20 m i la deixem anar lliurement, amb quina velocitat torna a passar pel lloc inicial?

Com que es tracta d'un sistema conservatiu, podem aplicar el principi de conservació de l'energia mecànica:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p = -\left(-G\frac{100 \cdot 500}{10} + G\frac{100 \cdot 500}{20}\right) = 1{,}6675 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Per tant, la velocitat és:

$$1{,}6675 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot v^2 \rightarrow v = 2{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

25. Calculeu la intensitat de la gravetat en la superfície del planeta Mart, la velocitat d'escapament i el seu període al voltant del Sol.

Dades: $M_M = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg, $R_M = 3{,}32 \cdot 10^6$ m, $R_{S\text{-}M} = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ m

La intensitat en mòdul del camp gravitatori a la superfície del planeta Mart és:

$$g = G\frac{m}{R^2} \rightarrow g = 3{,}9 \text{ m/s}^2$$

Calculem la velocitat d'escapament:

$$v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = 5{,}1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

I el període de rotació al voltant del Sol:

$$\omega^2 = G\frac{M_M}{r^3} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_M}} = 1{,}88 \text{ anys}$$