Moviment ondulatori

Qüestions

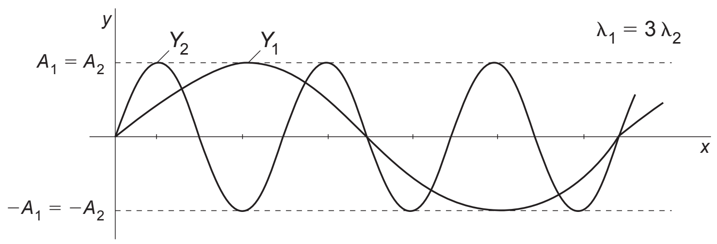
1. **Proposeu dos experiments en els quals es demostri que en la propagació d'una ona no hi ha transport net de matèria.**

El primer experiment consisteix a col·locar un suro petit sobre la superfície en repòs d'un líquid i generar una ona llançant un objecte sobre la superfície a una determinada distància del suro. Així, veurem que, en arribar la pertorbació al suro, aquest es posa a oscil·lar en direcció vertical sense que es desplaci en la direcció en què avança l'ona, és a dir, en direcció horitzontal.

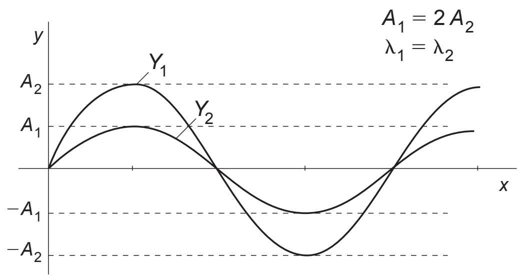
Un segon experiment, semblant a l'anterior, consisteix a fer passar un fil o una corda pel forat d'una volandera. Si fem oscil·lar la corda en un pla vertical, observarem que la volandera es posa a oscil·lar en direcció vertical sense que es desplaci en la direcció en què avança l'ona.

2. **Dibuixeu dues ones transversals:**

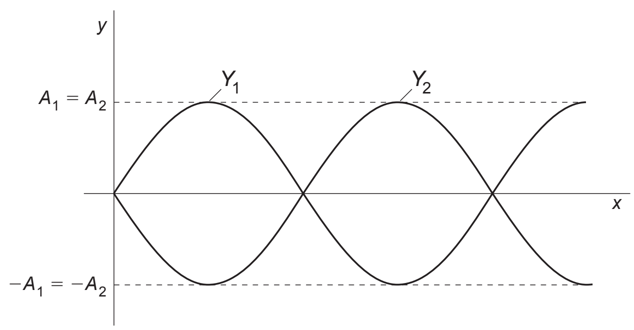
a) **De la mateixa amplitud, però una amb una longitud d'ona triple que la de l'altra.**



b) **De la mateixa longitud d'ona, però una amb la meitat d'amplitud que l'altra.**



c) **De la mateixa amplitud i la mateixa longitud d'ona, però desfasades 180º.**



3. **Per a una ona que es desplaça sobre l'eix *X* cap a l'esquerra, com s'expressa l'equació d'ona?**

Si una ona es desplaça cap a l'esquerra, podem considerar que la seva velocitat de fase és negativa. Per tant, si anomenem v el valor absolut d'aquesta velocitat, tenim que:

$$y(x\,,\,t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{-v}\right) = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v}\right) \rightarrow y(x\,,\,t) = A \sin(\omega t + kx)$$

4. **Escriviu l'equació de la quantitat de moviment que transmet una ona en el cas d'una ona harmònica.**

Recordem que l'equació d'una ona harmònica és $y(x\,,\,t) = A \sin(\omega t - kx)$. Si derivem aquesta equació respecte del temps, obtenim la velocitat d'una partícula del medi situada a una distància x del focus:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\,\omega \cos(\omega t - kx)$$

Finalment, si multipliquem aquesta velocitat per la massa m de la partícula del medi que ocupa la posició x, obtenim la quantitat de moviment en mòdul, p, que transmet l'ona:

$$p = mv = m\,A\,\omega \cos(\omega t - kx) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

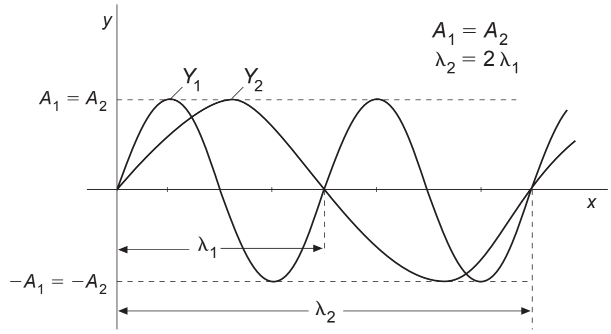
on $p_0 = m\,A\,\omega$ és el valor màxim de la quantitat de moviment que assoleix la partícula.

5. **Si disminuïm la freqüència d'una ona, com variarà la longitud d'ona si es transmet a través del mateix medi? Raoneu la resposta.**

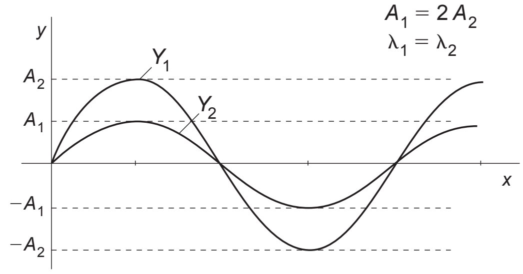
Si l'ona no canvia el seu medi de transmissió, la seva velocitat de fase no varia encara que variï la seva freqüència. Per tant, si recordem l'expressió que relaciona la freqüència, la velocitat de fase i la longitud d'ona, $v = \lambda f$, podem comprovar que, en disminuir la freqüència f, la longitud d'ona λ augmenta per tal que la velocitat de fase v es mantingui constant.

6. **Dibuixeu dues ones en una corda en els casos següents:**

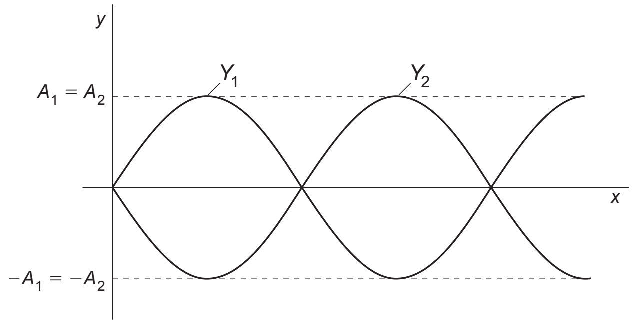
a) **Amb la mateixa amplitud, però amb longituds d'ona una el doble de l'altra.**



b) **Amb la mateixa longitud d'ona, però amb amplituds que estiguin en la relació $A_1 = 2\,A_2$.**



c) **Amb les mateixes amplituds i longituds d'ona, però desfasades 180º.**



7. Expliqueu detalladament què vol dir que una ona és doblement periòdica.

En tota ona s'ha de considerar una doble periodicitat: en el temps i en l'espai. En el temps perquè qualsevol partícula del medi oscil·la al pas de l'ona, i sabem que un moviment oscil·latori és un tipus particular de moviment periòdic. En l'espai perquè l'ona es va repetint periòdicament a intervals regulars de longitud d'ona d'acord amb el seu valor de longitud d'ona. Aquesta doble periodicitat queda reflectida, per exemple, en l'equació d'ona harmònica, en la qual la periodicitat temporal ve donada pel valor del període T, mentre que la periodicitat espacial ve donada pel valor de la longitud d'ona:

$$y(x\,,\,t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin 2\pi$$

Aquesta doble periodicitat d'una ona també queda reflectida si tenim en compte que l'expressió que lliga la velocitat de fase v, la longitud d'ona λ i el període T ve donada per $v = \frac{\lambda}{T}$. D'altra banda, es defineix la velocitat de fase com la relació entre la distància que recorre l'ona des del focus fins a un punt determinat situat a una distància x del focus i el temps que triga a fer-ho, $v = \frac{x}{t}$. Per tant, si comparem ambdues expressions, comprovem que, en el temps d'un període, l'ona avança una longitud igual a la longitud d'ona, mentre que, perquè l'ona recorri una longitud igual a la longitud d'ona, ha de transcórrer el temps d'un període.

8. Com es pot generar una ona cilíndrica? Expliqueu-ho detalladament.

Per generar una ona cilíndrica cal fer oscil·lar alhora tots els punts que estiguin situats sobre una mateixa recta i de tal manera que l'ona es transmeti en l'espai al llarg d'un medi homogeni, per tal que es conservi la forma de l'ona.

9. Dos diapasons emeten sons les freqüències dels quals estan en la relació 2:1. Raoneu quin tipus de relació tenen:

a) **Els seus períodes.**

La relació entre les freqüències dels dos diapasons és 2:1. Això vol dir que la freqüència f del primer so és el doble de la freqüència f' del segon so: $f = 2f'$.

Si tenim en compte la relació que lliga la freqüència i el període, $f = \frac{1}{T}$, trobem que:

$$f = 2f' \rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2}f' = \frac{1}{2}\frac{1}{f'} \rightarrow T = \frac{T'}{2}$$

Per tant, els períodes estan en la relació 1:2, és a dir, que el període del primer so és la meitat del període del segon so.

***b*)** **Les seves longituds d'ona.**

Si tenim en compte la relació que lliga la velocitat de fase, la freqüència i la longitud d'ona, i considerem que els dos sons es transmeten a la mateixa velocitat del so v, comprovem que:

$$f = 2f' \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{v'}{2f'} = \frac{1}{2}\frac{v}{f'} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda'}{2}$$

Per tant, les longituds d'ona també estan en la relació 1:2, és a dir, que la longitud d'ona del primer so és la meitat de la longitud d'ona del segon so.

10. A quin fenomen ondulatori és degut el fet que les ones sonores puguin travessar obstacles, com ara cantonades?

Les ones sonores, com qualsevol moviment ondulatori, poden vorejar els obstacles, com ara una cantonada o una petita escletxa. Recordem que aquest fenomen es coneix amb el nom de *difracció* i és una conseqüència del principi de Huygens.

11. Quin fenomen ondulatori es produeix quan sentim l'eco d'algun soroll?

El fenomen de l'eco consisteix en la reflexió d'una ona sonora quan troba un obstacle en el seu camí de transmissió, com per exemple una paret. Per tant, l'eco és un fenomen típic de reflexió d'una ona.

12. La reflexió, és un fenomen típicament ondulatori? I la refracció? Raoneu la resposta.

La reflexió no és un fenomen típicament ondulatori, sinó que també es dóna en el cas dels moviments corpusculars. Penseu, per exemple, quan una pilota xoca elàsticament amb un obstacle: es produeix una reflexió de la pilota. Per contra, la refracció sí que és un fenomen típicament ondulatori, ja que consisteix en la desviació que experimenta una ona quan passa d'un medi a un altre medi en què la velocitat de fase és diferent; aquesta desviació és una conseqüència del principi de Huygens, que, recordeu-ho, només verifiquen els moviments ondulatoris.

13. Una ona es transmet per un medi determinat amb una velocitat v_1, i quan penetra en un altre medi ho fa amb una velocitat v_2. Es pot donar el cas que no hi hagi refracció de l'ona? En quines condicions? Justifiqueu la resposta.

Suposem que l'ona penetra en el segon medi formant un angle α_i amb la recta normal a la superfície de separació dels dos medis, que considerem plana. Recordem que, en aquest cas, podem aplicar la llei de Snell:

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha'_r} = \frac{v_1}{v_2}$$

On α'_r és l'angle de refracció, i v_1 i v_2 les velocitats respectives en els dos medis. En el cas en què la velocitat en el segon medi sigui més gran que en el primer medi, el quocient $\frac{v_1}{v_2}$ serà més petit que la unitat i, per tant, també ho serà el quocient $\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha'_r}$:

$$v_1 < v_2 \rightarrow \frac{v_1}{v_2} < 1 \rightarrow \frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha'_r} < 1 \rightarrow \sin \alpha_i < \sin \alpha'_r \rightarrow \alpha_i < \alpha'_r$$

Si tenim en compte aquest últim resultat, podem veure que existeix un angle α_i més petit que 90º pel qual l'angle de refracció és de 90º. Per tant, podem concloure que, en aquestes condicions, l'ona refractada surt en una direcció que està compresa en la superfície de separació dels dos medis, i que, així, no hi ha ona refractada. L'angle d'incidència que verifica aquesta condició s'anomena *angle límit* i, segons que acabem de veure, per a angles d'incidència més grans o iguals que l'angle límit, no hi ha ona refractada i l'ona incident es reflecteix totalment. Aquesta situació s'estudiarà a la unitat següent, aplicada al cas de la llum.

14. **Un ciclista sent el so emès per la sirena d'un camió de bombers en moviment. Raoneu com és la freqüència del so que sent, respecte la freqüència de la sirena, quan el camió i el ciclista estan en les situacions següents:**

a) **El ciclista es troba en repòs en un semàfor en vermell i el camió s'hi apropa.**

Com que la font emissora d'ones (camió) s'apropa a l'observador (ciclista), els fronts d'ona que rep l'observador s'ajunten respecte del cas en què tots dos estan en repòs. Per tant, la longitud d'ona disminueix i, així, augmenta la freqüència del so emès pel camió: el ciclista sent la sirena del camió amb una freqüència més gran respecte del cas en què tots dos estan en repòs (so més agut).

b) **El camió ja ha sobrepassat el ciclista i se n'allunya.**

Com que ara la font emissora d'ones (camió) s'allunya de l'observador (ciclista), els fronts d'ona que rep aquest se separen respecte del cas en què tots dos estan en repòs. Així doncs, la longitud d'ona augmenta i, per tant, disminueix la freqüència del so emès pel camió: el ciclista sent la sirena del camió amb una freqüència més petita respecte del cas en què tots dos estan en repòs (so més greu.)

c) **El ciclista es mou en sentit contrari al camió tot apropant-s'hi.**

Tal com passa en el cas plantejat en l'apartat *a)*, l'observador i la font emissora d'ones s'apropen entre si, i la freqüència que rep el ciclista també és, per tant, més gran que en el cas en què tots dos estan en repòs. Com que el valor absolut de la velocitat relativa entre la font i l'observador és encara més gran que en l'apartat *a)*, perquè tots dos estan en moviment i s'apropen l'un a l'altre, tenim que la freqüència que rep ara el ciclista és fins i tot més gran que en el cas a); és a dir, el ciclista sent el so encara més agut.

d) **El ciclista es mou en sentit contrari al camió tot allunyant-s'hi.**

Com en el cas plantejat en l'apartat *b)*, l'observador i la font emissora d'ones s'allunyen entre si i la freqüència que rep el ciclista també és, per tant, més petita que en el cas en què tots dos estan en repòs. Com que el valor absolut de la velocitat relativa entre la font i l'observador és ara encara més gran que en el cas de l'apartat *b)*, perquè tots dos estan en moviment i s'allunyen l'un de l'altre, tenim que la freqüència que rep el ciclista és fins i tot més petita que en *b)*, i així, sent el so encara més greu.

e) **En quins dels casos anteriors el ciclista rep el so amb una freqüència més gran respecte de la freqüència quan tots dos mòbils estan en repòs? En quin cas rep el so amb una freqüència més petita? Raoneu les respostes.**

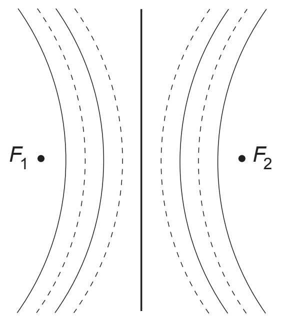
Els casos en què el ciclista rep una freqüència més gran respecte de la freqüència que rep quan tots dos estan en repòs són el *a)* i el *c)*. Això passa perquè en totes dues situacions la velocitat relativa entre tots dos és tal que s'estan apropant l'un a l'altre i els fronts d'ona que rep el ciclista estan més junts respecte de la situació en què tots dos estan en repòs. Per contra, els casos en què rep una freqüència més baixa són el *b)* i el *c)*, ja que la velocitat relativa entre tots dos és tal que s'allunyen l'un de l'altre i els front d'ona estan més separats respecte de la situació en què tots dos estan en repòs.

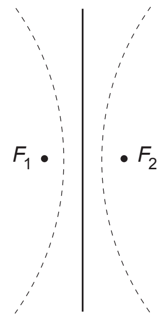
15. **Suposeu que una font d'ones i un observador es mouen en la mateixa direcció, en el mateix sentit i amb la mateixa celeritat. Es produeix efecte Doppler? Raoneu la resposta.**

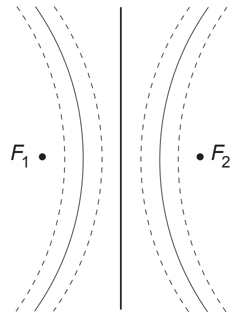
Si l'observador i la font es mouen amb la mateixa velocitat en valor absolut, la mateixa direcció i el mateix sentit, aleshores la velocitat relativa entre tots dos és zero. Per tant, la situació és similar a la que es dóna quan tots dos estan en repòs i no es produeix efecte Doppler.

16. **Dibuixeu les línies nodals i ventrals quan dues fonts d'ones coherents estan separades per una distància igual a:**

a) **Una longitud d'ona.** *b*) **Dues longituds d'ona.** *c*) **Tres longituds d'ona.**







17. **Com és l'ona resultant de la superposició de dos moviments ondulatoris de la mateixa amplitud, la mateixa freqüència i la mateixa longitud d'ona, que es transmeten per l'eix *X* i que estan desfasats $\frac{\pi}{4}$ rad?**

Les dues ones tenen la mateixa amplitud, la mateixa freqüència i la mateixa longitud d'ona, però estan desfasades un angle de $\frac{\pi}{4}$ rad. Per tant, també tenen la mateixa freqüència angular i el mateix nombre d'ona, i les seves funcions d'ona són:

$$y_1(x\,,\,t) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2(x\,,\,t) = A \sin\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}\right)$$

Aplicant el principi de superposició, podem veure que l'equació de l'ona resultant és:

$$y(x\,,\,t) = y_1(x\,,\,t) + y_2(x\,,\,t) = A \sin(\omega t - kx) + A \sin\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}\right)$$

Si traiem factor comú de *A* i recordem la relació trigonomètrica

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$y(x\,,\,t) = A\left[\cos\frac{(\omega t - kx) + \left(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\sin\frac{(\omega t - kx) + \left(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right] =$$

$$= A\cos\frac{\pi}{8}\sin\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{8}\right)$$

Aquesta última equació correspon a una ona d'amplitud $A\cos\frac{\pi}{8}$, que té una fase inicial de $\frac{\pi}{8}$ rad. Per tant, la resultant de la superposició dels dos moviments ondulatoris és una altra ona de la mateixa freqüència i de la mateixa longitud d'ona que les ones que interfereixen, però amb una amplitud disminuïda en un factor $\cos\frac{\pi}{8}$.

18. **Indiqueu tres situacions en què es produeixen ones estacionàries.**

Les ones estacionàries es produeixen sempre que una ona es transmet a través d'un medi que es troba en una regió de l'espai limitada per algun tipus de barrera. En tenim un exemple en les cordes dels instruments musicals de corda, en les quals la barrera la constitueixen els extrems mateixos de la corda, que es fixen en algun suport (penseu, per exemple, en les cordes d'una guitarra o d'un violí). Un exemple semblant es dóna en els instruments de vent, en els quals l'ona estacionària es produeix quan una ona sonora es propaga a l'interior d'un tub tancat, per exemple una flauta o els tubs d'un orgue. Tenim un tercer exemple en el cas de l'ona superficial que es propaga en un líquid contingut en un recipient petit: si produïm una ona en el centre del recipient, després d'esperar un temps, veurem que es produeix una ona estacionària en el recipient en reflectir-se l'ona produïda a les parets del recipient.

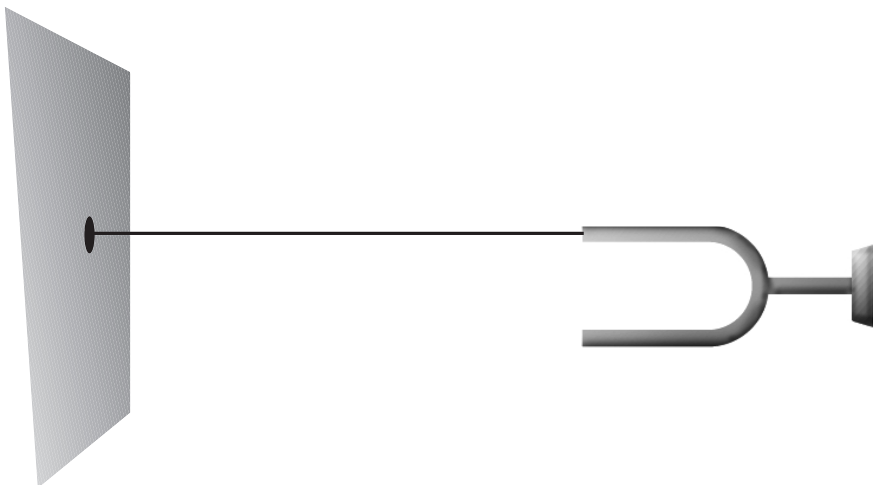
19. **Quan s'emet una nota aguda molt intensa a prop d'una copa de vidre prim, es pot arribar a trencar? A què és degut aquest fenomen?**

Les ones estacionàries que es produeixen en una corda tensa i en tubs tancats vibren segons una sèrie de freqüències característiques i donen el que s'anomenen *modes de vibració* o *harmònics,* les freqüències dels quals són múltiples de la freqüència fonamental. En general, qualsevol objecte pot vibrar d'acord amb les seves pròpies freqüències característiques. Si la freqüència d'una ona sonora que s'emet prop de l'objecte coincideix amb alguna de les freqüències característiques de l'objecte, aquest es veurà sotmès a una successió de polsos que faran augmentar la seva amplitud d'oscil·lació en valors cada vegada més grans que els de l'ona incident. Quan l'objecte és fràgil, com pot ser el cas d'una copa fina de vidre, aquest es pot arribar a trencar en trencar-se els enllaços entre algunes de les seves molècules com a resultat d'aquesta amplitud creixent. Aquest fenomen s'anomena *ressonància.*

20. **Com és l'ona estacionària que es produeix en una corda que només està subjectada per un extrem?**

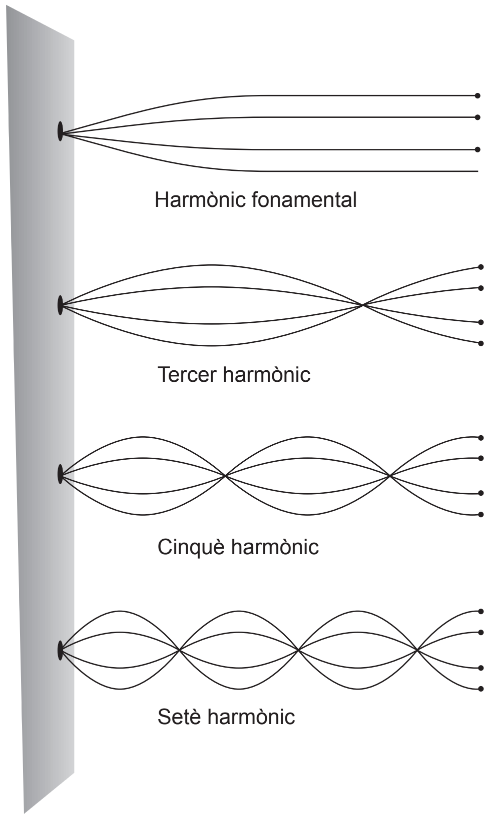
Suposem que una corda fixada només per un extrem està vibrant. En aquestes condicions, i com que l'altre extrem és lliure, s'origina una ona estacionària en la qual l'extrem lliure es comporta com un ventre. Aquesta ona estacionària es pot aconseguir, per exemple, fixant una corda de longitud L per un extrem i unint l'altre extrem a un diapasó que vibra. Aquest últim extrem es pot considerar lliure i la vibració del diapasó fa que hi tingui un ventre.

a)



Es pot comprovar que, tal com passa amb una corda fixada pel seus dos extrems, la corda pot vibrar segons diferents modes de vibració o harmònics, però ara amb un extrem que es comporta sempre com un ventre.

b)



Fixem-nos en les relacions que acompleixen els harmònics:

Harmònic fonamental: $\dfrac{\lambda_1}{4} = L \rightarrow \lambda_1 = 4\,L$

Tercer harmònic: $\dfrac{3\,\lambda_3}{4} = L \rightarrow \lambda_3 = \dfrac{4\,L}{3}$

Cinquè harmònic: $\dfrac{5\,\lambda_5}{4} = L \rightarrow \lambda_5 = \dfrac{4\,L}{5}$

Setè harmònic: $\dfrac{7\,\lambda_7}{4} = L \rightarrow \lambda_7 = \dfrac{4\,L}{7}$

Per tant, i en general:

$$\frac{(2\,n + 1)\,\lambda_n}{4} = L \rightarrow \lambda_n = \frac{4\,L}{2\,n + 1} \rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} \rightarrow f_n = \frac{(2\,n + 1)\,v}{4\,L}$$

On $n = 0, 1, 2...$

Observem que només tenim harmònics imparells.

21. Què oscil·la en el cas de les ones sonores? Expliqueu-ho detalladament.

En el cas d'una ona sonora que es propaga en un gas, oscil·la la densitat del gas, de manera que es van succeint una sèrie de contraccions i dilatacions de les diverses capes del gas i, per tant, augments i disminucions en la pressió local del gas. És el que passa, per exemple, amb el so que surt d'un altaveu: a mesura que la membrana de l'altaveu vibra, la capa d'aire més propera a l'altaveu pateix successives contraccions i dilatacions, les quals es van transmetent a les capes veïnes. En el cas de les ones sonores que es transmeten a través d'un líquid o d'un sòlid, també es produeixen contraccions o dilatacions successives de les diferents capes de material. Però si tenim en compte que els líquids i els sòlids són pràcticament incomprensibles, aquestes dilatacions i contraccions són gairebé inapreciables, a diferència d'un gas.

22. Una ona sonora pot estar polaritzada? Justifiqueu la resposta.

Si tenim en compte que les ones sonores són ones longitudinals, podem concloure que no poden estar mai polaritzades, ja que aquest fenomen només es dóna en el cas d'ones transversals.

23. Com varien l'amplitud i la intensitat d'energia amb la distància en els cas d'una ona esfèrica? Quina de les dues varia més ràpidament? Raoneu la resposta.

Considerem les expressions que lliguen la intensitat d'energia i l'amplitud amb la distància:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\ ;\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Podem observar que la intensitat d'energia és inversament proporcional al quadrat de la distància, de manera que la intensitat disminueix ràpidament en augmentar la distància. Quant a l'amplitud, podem observar que aquesta magnitud és inversament proporcional a la distància, de manera que l'amplitud disminueix en augmentar la distància; però aquesta disminució no és tan ràpida com en el cas de la intensitat d'energia, ja que la distància no està elevada al quadrat.

24. Tenim dues fonts sonores de la mateixa freqüència. Una emet les ones amb una potència 5 vegades més gran que l'altra. Quina relació tenen:

a) **Les seves amplituds a la mateixa distància.**

La potència P emesa per una font d'ones tridimensionals ve donada per l'expressió $P = \dfrac{E}{\Delta t} = I\,S$, mentre que la relació entre les intensitats d'energia i les amplituds ve donada per $\dfrac{I}{I'} = \dfrac{A'^2}{A^2}$. Si la potència P de la primera font és 5 vegades la potència P' de la segona, i si considerem la mateixa distància, $r = r'$, aleshores:

$$P = 5P' \rightarrow \frac{A}{A'} = \sqrt{\frac{I}{I'}} = \sqrt{\frac{\dfrac{P}{S}}{\dfrac{P'}{S'}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{5P'}{P}}{\dfrac{S'}{S}}} \cdot S = 4\pi r^2 = 4\pi r'^2 = \frac{S'A}{A'} = \sqrt{5}$$

Per tant, l'amplitud de la primera font a aquesta distància és $\sqrt{5}$ vegades més gran que l'amplitud de la segona font a la mateixa distància.

b) **Les seves intensitats d'energia a la mateixa distància.**

$$P = 5P' \rightarrow \frac{I}{I'} = \frac{\dfrac{P}{S}}{\dfrac{P'}{S'}} = 5\,\frac{P'}{P'}\,\frac{S'}{S'} \rightarrow \frac{I}{I'} = 5\;S = 4\pi r^2 = 4\pi r'^2 = S'$$

Per tant, la intensitat de la primera font a aquesta distància és 5 vegades més gran que la intensitat de la segona font a la mateixa distància.

25. Per una ona sonora:

a) **Com varia la intensitat quan l'amplitud augmenta en un factor 3?**

Considerem l'expressió que lliga la intensitat d'energia i l'amplitud:

$$\frac{I}{I'} = \frac{A'^2}{A'^2}$$

Si l'amplitud augmenta en un factor 3, tenim que:

$$A' = 3A \rightarrow \frac{I'}{I} = \frac{A^2}{A'^2} = \frac{A^2}{(3A)^2} = \frac{1}{9}\,\frac{A}{A} \rightarrow \frac{I'}{I} = \frac{1}{9}$$

Per tant, la intensitat disminueix en un factor 9.

b) **Quant ha de variar l'amplitud perquè la intensitat augmenti en un factor 6?**

Si la intensitat augmenta en un factor 6, tenim que:

$$I' = \frac{I}{6} \rightarrow \frac{A'}{A} = \sqrt{\frac{I}{I'}} = \sqrt{\frac{I}{\dfrac{I}{6}}} = \sqrt{6\,\frac{I}{I}} \rightarrow \frac{A'}{A} = \sqrt{6}$$

Per tant, l'amplitud ha d'augmentar en un factor $\sqrt{6}$.

26. **Determineu el quocient entre les intensitats i el quocient entre les amplituds en dos punts diferents si els nivells d'intensitat que hi origina una ona sonora difereixen en:**

a) **25 dB**

El nivell d'intensitat sonora B ve donat per l'expressió $B = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$, on I_0 és un valor de referència. Considerem dos punts en els quals les intensitats són I i I'. La diferència entre els nivells d'intensitat sonora ΔB és:

$$\Delta B = 10 \log \frac{I'}{I_0} - 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{\frac{I'}{I_0}}{\frac{I}{I_0}} = 10 \log \frac{I'}{I} = \log \left(\frac{I'}{I}\right)^{10} \rightarrow \left(\frac{I'}{I}\right)^{10} = 10^{\Delta B} \rightarrow \frac{I'}{I} = 10^{\frac{\Delta B}{10}}$$

Com que $\Delta B = 25$ dB, tenim que:

$$\frac{I'}{I} = 10^{\frac{\Delta B}{10}} = 10^{\frac{25}{10}} = 10^{2,5} = 316,22$$

b) **75 dB**

Com que $\Delta B = 75$ dB, tenim que:

$$\frac{I'}{I} = 10^{\frac{\Delta B}{10}} = 10^{\frac{75}{10}} = 10^{7,5} = 3,16 \cdot 10^7$$

27. **Consulteu bibliografia adient i escriviu un petit treball de recerca on s'expliquin els efectes que té el soroll sobre la salut de les persones.**

Resposta oberta.

Si es vol desenvolupar aquesta activitat, cal que l'alumnat consulti bibliografia sobre el tema o que visiti pàgines web com, per exemple, les de l'Organització Mundial de la Salut (OMS). L'activitat es pot plantejar com una ampliació del que s'ha explicat a la pàgina 289 del llibre, amb el mateix esquema: fonts de contaminació acústica i nivells d'intensitat sonora associats, nivells d'intensitat sonora permesos, alteracions sobre la salut.

Problemes

1. **Fem oscil·lar amb una amplitud de 15 cm un dels extrems d'una corda, de manera que en 15 s fa 15 oscil·lacions. Si l'altre extrem està a 4 m de distància, mesurada horitzontalment, i la pertorbació triga 2,6 s a arribar:**

L'enunciat d'aquest problema ha de dir «fa 20 oscil·lacions».

En primer lloc, calculem la freqüència amb les dades de les oscil·lacions que fa en 15 s.

$$f = \frac{20 \text{ osc.}}{15 \text{ s}} = 1,33 \text{ Hz}$$

a) **Calculeu la velocitat de fase de l'ona.**

Calculem la velocitat de fase amb les dades de la distància entre extrems i el temps que tarda la pertorbació a arribar d'un extrem a l'altre:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4}{2,6} = 1,54 \text{ m/s}$$

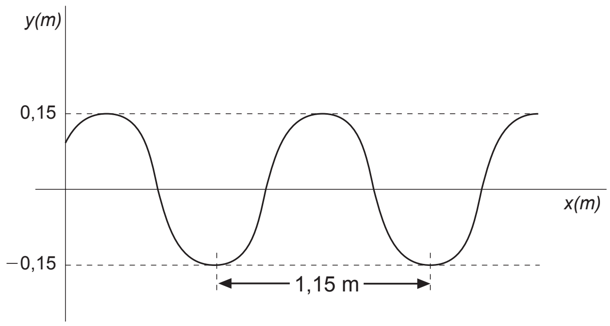
b) **Calculeu el nombre d'ona.**

Apliquem les expressions $v = \lambda f$ i $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$v = \lambda f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1{,}54}{1{,}33} = 1{,}15 \text{ m} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}15} = 5{,}44 \text{ rad/m}$$

c) **Escriviu l'equació d'ona i dibuixeu la forma que adopta la corda en un instant determinat.**

$$\left.\begin{array}{l} A = 15 \text{ cm} = 0{,}15 \text{ m} \\ \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1{,}33 = 8{,}38 \text{ rad/s} \end{array}\right\} \; y = A \sin(\omega t - kx) \rightarrow y = 0{,}15 \sin(8{,}38\, t - 5{,}44\, x)$$



2. **Una noia pilota una llanxa situada damunt de la superfície d'un llac i, amb el seu moviment, origina sobre l'aigua 15 oscil·lacions durant un temps de 25 s. Si l'ona superficial que es produeix triga 18 s a arribar a la riba del llac, quina és la longitud d'ona de l'ona generada?**

Cal que en l'enunciat d'aquest problema es digui que la llanxa és a 30 m de la riba del llac.

$$\left.\begin{array}{l} f = \dfrac{15 \text{ osc.}}{25 \text{ s}} = 0{,}6 \text{ Hz} \\ v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{30 \text{ m}}{18 \text{ s}} = 1{,}67 \text{ m/s} \end{array}\right\} \; \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1{,}67}{0{,}6} = 2{,}78 \text{ m}$$

3. **A l'aigua de mar el so es transmet amb una velocitat aproximada de 1 530 m/s. Quina és la freqüència que correspon a un so de longitud d'ona 2,5 m?**

$$\left.\begin{array}{l} v = 1\,530 \text{ m/s} \\ \lambda = 2{,}5 \text{ m} \end{array}\right\} \; f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1\,530}{2{,}5} = 612 \text{ Hz}$$

4. **L'oïda humana només és sensible als sons que tenen una freqüència compresa entre 20 Hz i 20 000 Hz. A quines longituds d'ona del so és sensible l'oïda humana, si suposem que la velocitat en l'aire és de 345 m/s?**

$$\left.\begin{array}{l} f_0 = 20 \text{ Hz} \\ v = 345 \text{ m/s} \end{array}\right\} \; \lambda = \frac{v}{f_0} = \frac{345}{20} = 17{,}25 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{\text{màx}} = 20\,000 \text{ Hz} \\ v = 345 \text{ m/s} \end{array}\right\} \; \lambda' = \frac{v}{f_{\text{màx}}} = \frac{345}{20\,000} = 1{,}72 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

5. **L'ona produïda sobre la superfície d'un líquid arriba a dos objectes que hi suren damunt i que estan separats una distància d'1,3 m. Els objectes es posen a oscil·lar i fan 16 oscil·lacions en 4 s, de manera que els moviments harmònics simples dels dos objectes estan en fase, i entre ells hi ha 3 longituds d'ona. Amb quina velocitat es propaga l'ona sobre la superfície d'aquest líquid?**

Com que els dos objectes estan separats una distància d'1,3 m i entre els dos hi ha 3 longituds d'ona aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{\Delta x}{3} = \dfrac{1{,}3}{3} = 0{,}43 \text{ m} \\[2ex] f = \dfrac{16 \text{ osc.}}{4 \text{ s}} = 4 \text{ Hz} \end{array}\right\} \qquad v = \lambda f = 0{,}43 \cdot 4 = 1{,}73 \text{ m/s}$$

6. **La funció de l'ona generada en una corda és:**

$$\boldsymbol{y(x\,,\,t) = 0{,}6 \sin 2\pi \left(\frac{t}{1{,}25} - \frac{x}{0{,}5}\right)}$$

on les distàncies s'expressen en metres, i el temps en segons.

Llegim els valors de A, T i λ directament de la funció d'ona:

Calculeu:

a) **La freqüència.**

$$T = 1{,}25 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8 \text{ Hz}$$

b) **La velocitat de fase.**

$\lambda = 0{,}5 \rightarrow v = \lambda f = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$ m/s

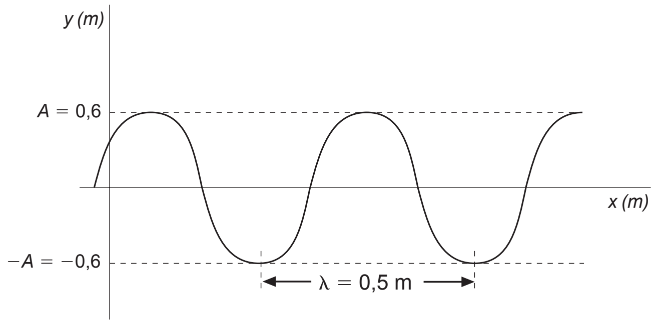
c) **L'amplitud.**

$A = 0{,}6$ m

d) **La longitud d'ona.**

$\lambda = 0{,}5$ m

e) **Esquematitzeu els dos últims resultats sobre un dibuix que representi la forma de la corda.**



7. **Determineu la diferència de fase que hi ha entre dos punts d'un medi en el qual es propaga una ona amb una velocitat de fase de 120 m/s i un període de 0,05 s, si sabeu que els punts estan a unes distàncies de 8 m i 12 m, respectivament, del focus.**

Amb les dades que es donen de T i v calculem ω i k:

$$T = 0{,}05 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 20 = 40\,\pi \text{ rad/s}$$

$$v = 120 \text{ m/s} \rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{40\,\pi}{120} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/m}$$

La diferència de fase és:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - k x_2) - (\omega t - k x_1) = k(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{3}(12 - 8) = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

8. **L'equació d'un moviment ondulatori ve donada per la funció $y(x, t) = 7 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6}\right)$, on totes les magnituds estan expressades en unitats del SI.**

Llegim els valors de A, ω i k directament de la funció d'ona.

Determineu:

***a*)** **L'amplitud i la velocitat d'un punt que és a una distància d'11 m del focus.**

$A = 7 \cdot 10^{-2}$ m

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt} = -7 \cdot 10^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6}\right) = 1{,}75 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6}\right)$$

$$v(11, t) = 1{,}75 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{t}{4} - \frac{11}{6}\right) = 1{,}75 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{t}{4} - 1{,}83\right)$$

***b*)** **La freqüència angular i el període.**

$$\omega = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}25} = 8\pi \text{ s}$$

***c*)** **El nombre d'ona i la longitud d'ona.**

$$k = \frac{1}{6} \text{ m} = 0{,}167 \text{ rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi \text{ m}$$

***d*)** **La freqüència i la velocitat de fase.**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8\pi} = 0{,}04 \text{ Hz}$$

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{0{,}25}{0{,}167} = 1{,}5 \text{ m/s}$$

(o bé, $v = \lambda f = 12\pi \cdot 0{,}04 = 1{,}5$ m/s)

9. **Donada la funció d'ona següent, on les distàncies s'expressen en metres i el temps en segons, calculeu la velocitat i l'acceleració d'un punt que dista 3 m de l'origen de coordenades quan ha passat un temps de 5 s.**

$$\boldsymbol{y(x, t) = 0{,}03 \sin\left(\frac{\pi}{8} t - \frac{\pi}{5} x\right)}$$

Quina és la velocitat de fase d'aquest moviment ondulatori?

$$v(x, t) = \frac{dy}{dt} = 0{,}03 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} t - \frac{\pi}{5} x\right) = 0{,}0118 \cos\left(\frac{\pi}{8} t - \frac{\pi}{5} x\right)$$

$$v(3\,,\,8) = 0{,}0118\cos\left(\frac{\pi}{8}\cdot 8 - \frac{\pi}{5}\cdot 3\right) = -9\cdot 10^{-3}\ \text{m/s}$$

$$a(x\,,\,t) = \frac{dv}{dt} = 0{,}0118\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\left[-\sin\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{5}x\right)\right] = -4{,}63\cdot 10^{-3}\sin\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{5}x\right)$$

$$a(3\,,\,8) = -4{,}63\cdot 10^{-3}\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot 8 - \frac{\pi}{5}\cdot 3\right) = 3\cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\dfrac{\pi}{8}}{\dfrac{\pi}{5}} = 0{,}625\ \text{m/s}$$

10. En una corda s'ha generat una ona d'equació:

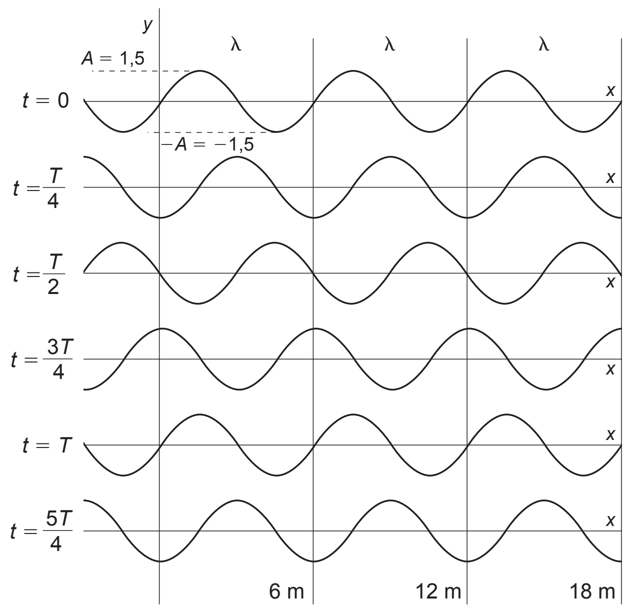
$$\boldsymbol{y(x\,,\,t) = 1{,}5\sin 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6}\right)}$$

on les distàncies s'expressen en metres i el temps en segons. Representant 3 longituds d'ona, dibuixeu la forma de la corda en els instants de temps següents:

$$\boldsymbol{t = 0,\ t = \frac{T}{4},\ t = \frac{T}{2},\ t = \frac{3T}{4},\ t = T,\ t = \frac{5T}{4}}$$

Per dibuixar la forma de la corda en els instants de temps indicats, cal obtenir les funcions de x que resulten de substituir els temps indicats en l'equació d'ona, tenint en compte que $T = \dfrac{1}{4} =$ $= 0{,}25$ s (ho llegim directament de l'equació d'ona). A continuació, donem valors a x en les equacions obtingudes, fins a un valor màxim de $x_{màx} = 3\lambda = 3\cdot 6 = 18$ m, ja que en l'enunciat se'ns diu que cal representar 3 longituds d'ona, i $\lambda = 6$ m (ho llegim directament de l'equació d'ona).

Per fer aquestes representacions gràfiques s'aconsella fer servir un programa informàtic (per exemple EXCEL) i obtindrem els gràfics següents:



11. **Determineu l'angle de desviació respecte de la normal que experimenta una ona sonora que es propaga en l'aire quan incideix amb un angle d'inclinació de 15° sobre la superfície en repòs d'un estany i l'ona penetra en l'aigua.**

L'angle d'inclinació ha de ser de 10°.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= 10° \\ v_1 &= v_{aire} = 340 \text{ m/s} \\ v_2 &= v_{aigua} = 1\,500 \text{ m/s} \end{aligned}\right\}$$

Apliquem la llei de Snell:

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha'_r} = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow \frac{\sin 10°}{\sin \alpha'_r} = \frac{340}{1\,500} \rightarrow \sin \alpha'_r = \frac{1\,500 \cdot \sin 10°}{340} = 0{,}7661 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha'_r = \sin^{-1}(0{,}7661) = 50°$$

12. **Una ona plana produïda en una cubeta d'ones arriba a la superfície de separació de dos líquids diferents i incideix de manera que un raig determinat forma un angle de 25° respecte de la superfície de separació. Una part de l'ona es reflexa i la resta es refracta. Si sabem que en el primer medi la velocitat de l'ona és d'1,27 m/s i que en el segon medi és de 1,03 m/s, calculeu l'angle de reflexió i l'angle de refracció.**

L'angle que forma el raig incident amb la superfície de separació dels dos líquids val 25°. Per tant,

$\alpha_i = 90° - 25° = 65°$

Apliquem la llei de reflexió i obtenim l'angle de reflexió:

$\alpha_r = \alpha_i \Rightarrow \alpha_r = 65°$

Per calcular l'angle de refracció, apliquem la llei de Snell:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= 65° \\ v_1 &= 1{,}27 \text{ m/s} \\ v_2 &= 1{,}03 \text{ m/s} \end{aligned}\right\} \frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha'_r} = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow \frac{\sin 65°}{\sin \alpha'_r} = \frac{1{,}27}{1{,}03} \rightarrow \sin \alpha'_r = \frac{1{,}03 \cdot \sin 65°}{1{,}27} = 0{,}7350 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha'_r = \sin^{-1}(0{,}7350) = 47{,}31°$$

13. **Dues ones transversals produïdes en sengles focus puntuals tenen les mateixes amplitud i freqüència. D'acord amb el que es mostra a la figura 8.51, on les valls s'han representat amb línies contínues, i les crestes amb línies discontínues, raoneu com seran les interferències en els punts *A*, *B*, *C*, *D*, *E* i *F*.**

Punt A: Coincideixen una vall i una cresta, de manera que la diferència de camins és un nombre imparell de semilongituds d'ona. Per tant, es dóna una **interferència destructiva.**

Punt B: Coincideixen dues crestes, de manera que la diferència de camins és un múltiple de la longitud d'ona. Per tant, hi ha **interferència constructiva.**

Punt C: Coincideixen dues valls, i com en el cas del punt B, la diferència de camins és un múltiple de la longitud d'ona. Per tant, hi ha una **interferència constructiva.**

Punt D: Tenim la mateixa situació que en el punt C; coincideixen dues valls i, per tant, hi ha **interferència constructiva.**

Punt E: Com en el cas del punt A, coincideixen una cresta i una vall. Per tant, es dóna **interferència destructiva.**

Punt F i P: Les dues ones han recorregut camins que no són múltiples ni de λ ni de $\frac{\lambda}{2}$ ni de $\frac{\lambda}{4}$. Per tant, la diferència de camins no verifica ni la condició d'interferència constructiva ($n\lambda$) ni la d'interferència destructiva $\left((2n + 1)\,\frac{x}{2}\right)$. Per tant, tenim una situació d'**interferència parcialment constructiva.**

14. **Sobre la superfície de l'aigua generem dos moviments ondulatoris i fem oscil·lar dos punts amb una freqüència síncrona de 5 Hz. Les ones produïdes es transmeten per tota la superfície amb una velocitat de 0,45 m/s. En un punt de la superfície, que és a una distància r_1 del primer focus i a una distància r_2 del segon focus, col·loquem un suro. Determineu-ne l'estat de vibració en els casos següents:**

En primer lloc, calculem la longitud d'ona i la meitat de la longitud d'ona:

$$\left.\begin{array}{l} f = 5\text{ Hz} \\ v = 0{,}4\text{ m/s} \end{array}\right\} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09\text{ m} \rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045\text{ m}$$

a) **r_1 = 15 cm, r_2 = 28,5 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 15\text{ cm} = 0{,}15\text{ m} \\ r_2 = 28{,}5\text{ cm} = 0{,}285\text{ m} \end{array}\right\} \quad \Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}285 - 0{,}15 = 0{,}135\text{ m}$$

$$\frac{\Delta r}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{0{,}135}{0{,}045} = 3 \rightarrow \Delta r = 3\,\frac{\lambda}{2} = (2n + 1)\,\frac{\lambda}{2};\ n = 1 \rightarrow$$

Condició d'**interferència destructiva.**

b) **r_1 = 14 cm, r_2 = 5 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 14\text{ cm} = 0{,}14\text{ m} \\ r_2 = 5\text{ cm} = 0{,}05\text{ m} \end{array}\right\} \quad \Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}05 - 0{,}14 = -0{,}09\text{ m}$$

$$\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{-0{,}09}{0{,}09} = -1 \rightarrow \Delta r = -1 \cdot \lambda = n\lambda;\ n = -1 \rightarrow$$

Condició d'**interferència constructiva.**

c) **r_1 = 8 cm, r_2 = 10,25 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 8\text{ cm} = 0{,}08\text{ m} \\ r_2 = 10{,}25\text{ cm} = 0{,}1025\text{ m} \end{array}\right\} \quad \Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}1025 - 0{,}08 = 0{,}025\text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta r}{\lambda} = \dfrac{0{,}025}{0{,}09} = 0{,}278 \rightarrow \Delta r \neq n\lambda \\[2ex] \dfrac{\Delta r}{\frac{\lambda}{2}} = \dfrac{0{,}025}{0{,}045} = 0{,}5556 \rightarrow \Delta r \neq (2n + 1)\,\dfrac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

No es dóna ni la condició d'interferència constructiva ni la d'interferència destructiva → **Interferència parcialment constructiva.**

d) **r_1 = 20 cm, r_2 = 15 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m} \\ r_2 = 15 \text{ cm} = 0{,}15 \text{ m} \end{array}\right\} \Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}15 - 0{,}2 = 0{,}05 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta r}{\lambda} = \dfrac{0{,}05}{0{,}09} = 0{,}5556 \rightarrow \Delta r \neq n\lambda \\ \dfrac{\Delta r}{\frac{\lambda}{2}} = \dfrac{0{,}05}{0{,}045} = 1{,}1111 \rightarrow \Delta r \neq (2n+1)\dfrac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

No es dóna ni la condició d'interferència constructiva ni la d'interferència destructiva → **Interferència parcialment constructiva.**

15. **Discutiu, en els casos següents, com serà l'estat de vibració d'un punt que és a unes distàncies r_1 i r_2 de dos focus emissors d'ones, tenint en compte que entre ells hi ha una separació de 12 cm i 3 longituds d'ona:**

En primer lloc calculem la longitud d'ona i la meitat de la longitud d'*ona:*

$$\overline{F_1 F_2} = 12 \text{ cm} = 0{,}12 \text{ m}$$

$$3\lambda = 0{,}12 \rightarrow \lambda = \frac{0{,}12}{3} = 0{,}04 \text{ m}; \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02 \text{ m}$$

a) **r_1 = 6 cm, r_2 = 18 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 6 \text{ cm} = 0{,}06 \text{ m} \\ r_2 = 18 \text{ cm} = 0{,}18 \text{ m} \end{array}\right\} \Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}18 - 0{,}06 = 0{,}12 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{0{,}12}{0{,}04} = 3 \rightarrow \Delta r = 3\lambda = n\lambda,\ n = 3 \rightarrow$$ Condició d'**interferència constructiva.**

b) **r_1 = 12 cm, r_2 = 9 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 12 \text{ cm} = 0{,}12 \text{ m} \\ r_2 = 9 \text{ cm} = 0{,}09 \text{ m} \end{array}\right\} \Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}09 - 0{,}12 = -0{,}03 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta r}{\lambda} = \dfrac{-0{,}03}{0{,}04} = -0{,}75 \rightarrow \Delta r \neq n\lambda \\ \dfrac{\Delta r}{\frac{\lambda}{2}} = \dfrac{-0{,}03}{0{,}02} = -1{,}5 \rightarrow \Delta r \neq (2n+1)\dfrac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

No es dóna ni la condició d'interferència constructiva ni la d'interferència destructiva → **Interferència parcialment constructiva.**

c) **r_1 = 11,75 cm, r_2 = 17,25 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 11{,}75 \text{ cm} = 0{,}1175 \text{ m} \\ r_2 = 17{,}25 \text{ cm} = 0{,}1725 \text{ m} \end{array}\right\} \Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}1725 - 0{,}1175 = 0{,}055 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\Delta r}{\lambda} = \dfrac{0{,}055}{0{,}04} = 1{,}375 \;\rightarrow\; \Delta r \neq n\lambda \\[2ex] \dfrac{\Delta r}{\dfrac{\lambda}{2}} = \dfrac{0{,}055}{0{,}02} = 2{,}75 \;\rightarrow\; \Delta r \neq (2n+1)\,\dfrac{\lambda}{2}\end{array}\right\} \rightarrow$$

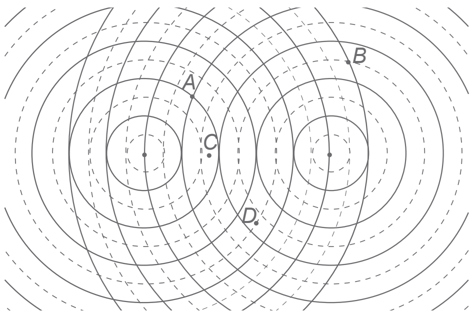
No es dóna ni la condició d'interferència constructiva ni la d'interferència destructiva → **Interferència parcialment constructiva.**

d) **r_1 = 25 cm, r_2 = 31 cm**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 25 \text{ cm} = 0{,}25 \text{ m} \\ r_2 = 31 \text{ cm} = 0{,}31 \text{ m}\end{array}\right\} \quad \Delta r = 0{,}31 - 0{,}25 = 0{,}06 \text{ m}$$

$\dfrac{\Delta r}{\dfrac{\lambda}{2}} = \dfrac{0{,}06}{0{,}02} = 3 \;\rightarrow\; \Delta r = 3\,\dfrac{\lambda}{2} = (2n+1)\,\dfrac{\lambda}{2},\ n = 1 \;\rightarrow$ Condició d'**interferència destructiva.**

e) **Feu un esquema que representi la interferència i situeu-hi diversos punts on hi hagi diferents tipus d'interferències.**



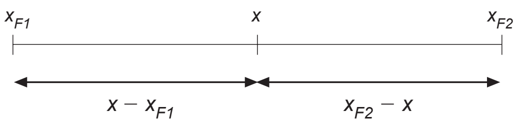
16. **En els punts d'abscissa x = 0 m i x = 5 m es generen dues ones longitudinals, és a dir, unidimensionals, que es propaguen al llarg de l'eix *X* amb la mateixa amplitud i amb la mateixa freqüència. Si entre tots dos punts hi ha 5 semilongituds d'ona:**

En primer lloc calculem la longitud d'ona:

$$\left.\begin{array}{l} x_{F1} = 0 \text{ m} \\ x_{F2} = 5 \text{ m}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_{F2} - x_{F1} = 5 - 0 = 5 \text{ m} \\ x_{F1} - x_{F2} = 5\,\dfrac{\lambda}{2}\end{array}\right\} \quad 5 = 5\,\dfrac{\lambda}{2} \;\rightarrow\; \lambda = 2 \text{ m}$$

a) **Trobeu els punts on hi ha interferència constructiva i els punts on hi ha interferència destructiva.**

Dibuixem la situació:



Ara calculem la diferència de camins recorreguts per les dues ones en un punt genèric *x:*

$$\Delta r = (x - x_{F1}) - (x_{F2} - x) = 2x - x_{F1} - x_{F2} = 2x - 0 - 5 = 2x - 5$$

Interferència constructiva:

$$\Delta r = n\lambda \;\rightarrow\; 2x - 5 = n \cdot 2 \;\rightarrow\; x = \frac{2n}{2} + \frac{5}{2} \;\rightarrow\; x = n + \frac{5}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2...$$

En tots els punts en què es verifica la condició anterior és dóna interferència constructiva. És el cas, per exemple dels punts (situats entre x_{F1} i x_{F2}):

$$n = -2 \rightarrow x = -2 + \frac{5}{2} = 0{,}5 \text{ m}$$

$$n = -1 \rightarrow x = -1 + \frac{5}{2} = 1{,}5 \text{ m}$$

$$n = 0 \rightarrow x = 0 + \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ m}$$

$$n = 1 \rightarrow x = 1 + \frac{5}{2} = 3{,}5 \text{ m}$$

$$n = 2 \rightarrow x = 2 + \frac{5}{2} = 4{,}5 \text{ m}$$

Interferència destructiva:

$$\Delta r = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow 2x - 5 = (2n + 1)\cdot\frac{2}{2} \rightarrow 2x - 5 = 2n + 1 \rightarrow 2x = 2n + 1 + 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{2n}{2} + \frac{6}{2} \rightarrow x = n + 3,\ n = 0, \pm1, \pm2...$$

En tots els punts en què es verifica aquesta última condició, és dóna interferència destructiva, trets dels punts $x = 0$ i $x = 5$ m, que també la verifiquen però, en ser els focus emissors d'ones, on no hi pot haver, lògicament, interferència destructiva.

És el cas, per exemple dels punts (situats entre x_{F1} i x_{F2}):

$$n = -2 \rightarrow x = -2 + 3 = 1 \text{ m}$$

$$n = -1 \rightarrow x = -1 + 3 = 2 \text{ m}$$

$$n = 0 \rightarrow x = 0 + 3 = 3 \text{ m}$$

$$n = 1 \rightarrow x = 1 + 3 = 4 \text{ m}$$

b) **Suposeu que en els mateixos punts es generen dues ones circulars (bidimensionals), com les ones superficials produïdes a la cubeta d'ones. Hi haurà els mateixos tipus d'interferències en els punts que heu trobat a l'apartat anterior? Raoneu la resposta.**

Tenint en compte que les ones superficials generades en un líquid pateixen una atenuació a mesura que ens allunyem del focus, les interferències anteriors no són ni totalment constructives ni totalment destructives, ja que l'ona que arriba del focus més llunyà no té la mateixa amplitud que l'ona que arriba del focus més proper, sinó que la seva amplitud és lleugerament inferior.

17. **Dues ones harmòniques transversals longitudinals es propaguen al llarg de l'eix X d'acord amb les funcions d'ona següents: $y_1(x\,,\,t) = 0{,}2 \sin(30t - 4{,}4x)$, $y_2(x\,,\,t) = 0{,}2 \sin(28t - 4{,}2x)$, on totes les unitats estan mesurades en unitats del SI.**

$$y_1(x\,,\,t) = 0{,}2 \sin(30t - 4{,}4x)$$

$$y_2(x\,,\,t) = 0{,}2 \sin(28t - 4{,}2x)$$

***a*)** **Determineu la funció d'ona resultant de la interferència.**

Sumem les dues ones per obtenir l'ona resultant:

$y = y_1 + y_2 = 0{,}2 \sin (30\,t - 4{,}4\,x) + 0{,}2 \sin (28\,t - 4{,}2\,x)$

$y = 0{,}2\,[\sin (30\,t - 4{,}4\,x) + \sin (28\,t - 4{,}2\,x)]$

Apliquem l'expressió trigonomètrica següent:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Tenim doncs:

$$y = 0{,}2 \cdot 2 \cdot \left[\sin \frac{(30\,t - 4{,}4\,x) + (28\,t - 4{,}2\,x)}{2} \cos \frac{(30\,t - 4{,}4\,x) - (28\,t - 4{,}2\,x)}{2}\right]$$

$y(x\,,\,t) = 0{,}4 \cos (t - 0{,}1\,x) \sin (29\,t - 4{,}3\,x)$

***b*)** **Representeu en un dibuix la forma de l'ona.**

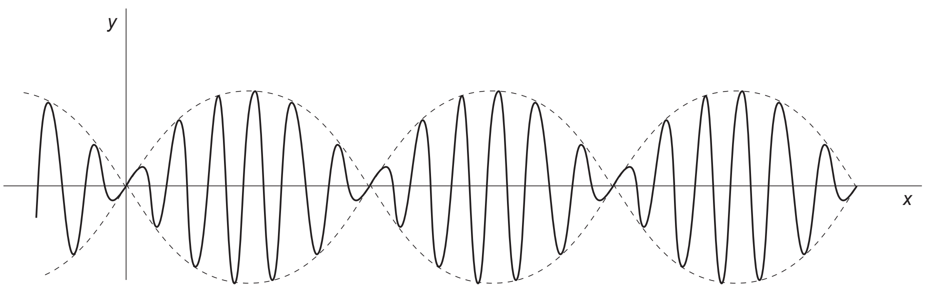
Per fer la representació gràfica de l'ona, donem un valor determinat al temps, ja que volem representar la forma de l'ona. Per exemple, podem fer $t = 0$ per simplificar el càlcul de la funció $y(x)$ que es vol representar:

$y(x\,,\,0) = 0{,}4 \cos (0 - 0{,}1\,x) \sin (0 - 4{,}3\,x) \rightarrow y(x) = -0{,}4 \cos 0{,}1\,x \sin 4{,}3\,x$

Per fer la representació gràfica de la funció de x anterior, $y(x)$, donem valors a la variable independent x i calculem els valors corresponents de la variable dependent y, de manera que, per exemple, quedin representades dues longituds d'ona. Com que $x = 4{,}3$ m, tenim:

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{4{,}3} = 1{,}46 \text{ m} \rightarrow 2\lambda = 2{,}92 \text{ m}$$

Per tant, hem de donar a x valors compresos entre $x = 0$ i $x = 3$ m, aproximadament. Es pot fer servir un programa informàtic.



***c*)** **D'acord amb la funció d'ona obtinguda, discutiu com és el tipus d'ona que s'obté en aquesta situació.**

Característiques de l'ona resultant:

— L'amplitud de l'ona resultant no és constant, sinó que té una doble dependència espacial i temporal. Per tant, diem que l'amplitud està *modulada.* Aquesta doble dependència queda reflectida en els valors de la freqüència angular ω_{mod} i el nombre d'ona k_{mod} de l'amplitud modulada, que, com veiem, tenen uns valors molt petits comparats amb els de les ones incidents:

$$\omega_{mod} = 1 \text{ rad/s}, \; k_{mod} = 0{,}1 \text{ rad/m}$$

— A més de tenir una amplitud modulada, l'ona resultant és una ona harmònica amb una freqüència angular i un nombre d'ona molt semblant als de les ones que interfereixen, essent, de fet, les mitjanes aritmètiques de les freqüències angulars i els nombres d'ona de les ones incidents y_1 i y_2:

$$\omega_{mit} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 29 \text{ rad/s}$$

$$k_{mit} = \frac{k_1 + k_2}{2} = 4{,}3 \text{ rad/m}$$

— Cada $\frac{T_{mod}}{2}$ segons, l'amplitud modulada de l'ona resultant pren el seu valor màxim o el seu valor mínim: és a dir, que cada $\frac{T_{mod}}{2}$ s es produeix un *batec.*

d) **Quina és la velocitat de fase de l'ona resultant?**

$$v = \frac{\omega_{mit}}{k_{mit}} = \frac{29}{4{,}3} = 6{,}74 \text{ m/s}$$

18. En una corda subjectada pels extrems es genera una ona de manera que la longitud entre els extrems és de 0,75 m i l'amplitud màxima d'oscil·lació inicial és de 5 mm. L'ona estacionària originada conté 5 nodes, incloent-hi els extrems, i vibra amb una freqüència de 400 Hz. A quina velocitat es propaga l'ona? Quina és l'equació de l'ona estacionària?

Com que hi ha 5 nodes, deduïm que $n = 4$

$$\left.\begin{array}{l} n = 4 \\ L = 0{,}75 \text{ m} \end{array}\right\} \quad \lambda = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 0{,}75}{4} = 0{,}375 \text{ m}$$

$$v = \lambda f = 0{,}375 \cdot 400 = 150 \text{ m/s}$$

Ara calculem, A_0, k i ω per poder escriure l'equació d'ona estacionària:

$$A_0 = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}375} = \frac{16\pi}{3} \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 400 = 800\pi \text{ rad/s}$$

$$y(x, t) = 2A_0 \sin kx \cos \omega t \rightarrow y(x, t) = 10^{-2} \sin \frac{16\pi}{3} x \cos 800\pi t$$

19. En un tub tancat d'1,25 m de longitud es genera una ona sonora. Determineu les freqüències i les longituds d'ona dels harmònics de l'ona estacionària que es produeix dins del tub si suposem que la velocitat del so és de 340 m/s.

$$\left.\begin{array}{l} L = 1{,}25 \text{ m} \\ v = 340 \text{ m/s} \end{array}\right\}$$

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{340}{2 \cdot 1{,}25} = 136 \text{ Hz}$$

$$f_n = n f_0 \rightarrow f_n = 136\, n \text{ Hz}$$

$$\lambda n = \frac{2L}{n} \rightarrow \lambda n = \frac{2{,}5}{n} \text{ m}$$

20. **Determineu la velocitat del so quan es transmet a través de l'heli, amb una temperatura de 25 °C, si sabeu que la constant adiabàtica d'aquest gas val 1,67 i que la seva massa molecular és de 4 g/mol.**

Dada: R = 8,31 j/mol·K

Expressem la massa molecular i la temperatura en unitats del SI i apliquem l'expressió de la velocitat del so en els gasos:

$$\left.\begin{array}{l} M = 4 \text{ g/mol} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} \\ T = 25\ °\text{C} = 298 \text{ K} \\ \gamma = 1{,}67 \\ R = 8{,}31 \text{ J/mol} \end{array}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 8{,}31 \cdot 298}{4 \cdot 10^{-3}}} = 1016{,}80 \text{ m/s}$$

21. **Donem un cop a un extrem d'una barra d'alumini. Si la pertorbació triga una mil·lèsima de segon a arribar a l'altre extrem, quina és la longitud de la barra?**

Dades: la densitat de l'alumini val 2,7 g/cm³ i el seu mòdul de Young és de $7 \cdot 10^{10}$ N/m²

Expressem la densitat en unitats del SI i apliquem l'expressió de la velocitat del so en els sòlids.

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{Al} = 2{,}7 \text{ g/cm}^3 = 2{,}7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ y_{Al} = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{y}{\rho}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{10}}{2{,}7 \cdot 10^{-3}}} = 5{,}09 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Ara, amb l'expressió de la velocitat del MRU, calculem la longitud de la barra:

$\Delta t = 1 \text{ m/s} = 10^{-3} \text{ s}$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{l}{\Delta t} \rightarrow l = v\, \Delta t = 5{,}09 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 5{,}09 \text{ m}$$

22. **Consultant la taula 8.1, calculeu la velocitat del so en els materials següents:**

Dades: ρ_{Cu} = 8,96 g/cm³; ρ_{Pb} = 11,4 g/cm³

Expressem la densitat en unitats del SI, consultem la taula 8.1 i apliquem l'expressió de la velocitat del so en els sòlids.

a) **Coure**

$$\left.\begin{array}{l} \rho_a = 8{,}96 \text{ g/cm}^3 = 8{,}96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ y_a = 1{,}25 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \end{array}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{y}{\rho}} = \sqrt{\frac{1{,}25 \cdot 10^{11}}{8{,}96 \cdot 10^3}} = 3735{,}1 \text{ m/s}$$

b) **Plom**

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{Pb} = 11{,}4 \text{ g/cm}^3 = 1{,}14 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_{Pb} = 1{,}6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{10}}{1{,}14 \cdot 10^4}} = 1184{,}7 \text{ m/s}$$

23. **Quina és la velocitat del so en l'aigua pura si sabem que la seva densitat és d'1 g/cm³ i el seu mòdul de compressibilitat és de $2{,}22 \cdot 10^9$ N/m²?**

Expressem la densitat en unitats del SI i apliquem l'expressió de la velocitat del so en els líquids.

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{H_2O} = 1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ K_{H_2O} = 2{,}22 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \end{array}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}22 \cdot 10^9}{10^3}} = 1490 \text{ m/s}$$

24. La velocitat del so en el mercuri és de 1450 m/s. Si sabem que la densitat d'aquest metall és de 13,6 g/cm³, quant val el seu mòdul de compressibilitat?

Expressem la densitat en unitats del SI i aïllem el mòdul de compressibilitat en l'expressió de la velocitat del so en els líquids.

$$\left.\begin{array}{l}\rho_{Hg} = 13{,}6 \text{ g/cm}^3 = 1{,}36 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3 \\ v = 1\,450 \text{ m/s}\end{array}\right\}$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \rightarrow k = \rho v^2 = 1{,}36 \cdot 10^4 \cdot 1\,450^2 = 2{,}86 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

25. A quina distància del focus l'amplitud d'una ona queda atenuada en un 15% si sabem que a 3 m l'atenuació arriba al 25%? Quina és la relació entre les intensitats?

Anomenem A_0 l'amplitud de l'ona en el focus, A_1 l'amplitud a la distància r_1 desconeguda, i A_2 l'amplitud a la distància $r_2 = 3$ m.

Si en r_1 l'ona s'atenua en un 15 % vol dir que en aquest punt l'amplitud és un 85 % de l'amplitud en el focus. Per tant:

$$r_1 = ? \rightarrow A_1 = 0{,}85\, A_0$$

En el punt r_2 l'ona s'atenua un 25 % i, per tant, l'amplitud en aquest punt és un 75 % de l'amplitud en el focus:

$$r_2 = 3 \text{ m} \rightarrow A_2 = 0{,}75\, A_0$$

Si dividim les expressions anteriors per a A_2 i A_1, i tenim en compte que $\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2}$ i que $r_2 = 3$ m, la distància r_1 demanada és:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{0{,}75\, A_0}{0{,}85\, A_0} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow \frac{r_1}{3} = \frac{0{,}75}{0{,}85} \rightarrow r_1 = 3 \cdot \frac{0{,}75}{0{,}85} \rightarrow r_1 = 2{,}65 \text{ m}$$

Per calcular la relació entre les intensitats en r_1 i r_2 apliquem l'expressió corresponent:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{2{,}65^2}{3^2} = 0{,}78$$

26. Un altaveu emet un cert so per l'aire amb una freqüència de 125 Hz. A 2 m de l'altaveu la intensitat de l'ona val $5{,}2 \cdot 10^{-6}$ W/cm² i se suposa que no hi ha absorció, és a dir, que el medi és elàstic.

Expressem la intensitat I_1, a la distància $r_1 = 2$ m, en unitats del SI:

$$I_1 = 5{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ W/cm}^2 = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

a) **Si tenim en compte que la densitat de l'aire és d'1,29 kg/m³ i que la velocitat del so en aquest medi és de 340 m/s, quina amplitud té aquest so a aquesta distància?**

Apliquem l'expressió de I per aïllar l'amplitud A_1 a la distància $r_1 = 2$ m:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 2 \text{ m} \\ f = 125 \text{ Hz} \\ \rho = 129 \text{ kg/m}^3 \\ v = 340 \text{ m/s}^s \\ I_1 = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} I = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2 \rightarrow \\ \rightarrow A_1 = \sqrt{\dfrac{I_1}{2\pi^2 \rho v f^2}} = \sqrt{\dfrac{7 \cdot 10^{10}}{2\pi^2 \cdot 1{,}29 \cdot 340 \cdot 125^2}} = 1{,}96 \cdot 10^{-5} \text{ m} \end{array}$$

***b*)** **Amb quina amplitud i amb quina intensitat rebem aquest so si ens situem a 20 m de distància del focus?**

A la distància $r_2 = 20$ m del focus, A val:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow A_2 = A_1 \frac{r_1}{r_2} = 1{,}96 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2}{20} = 1{,}96 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

La intensitat I_2 és:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \rightarrow I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2^2}{20^2} = 5{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

***c*)** **Quina energia emet l'altaveu en 2 minuts?**

Per calcular l'energia emesa en 2 minuts, apliquem la definició de I, tenint en compte que, a 2 m del focus, la superfície és la d'una esfera, $s_1 = 4\pi\, r_1^2$:

$$I = \frac{E}{S\,\Delta t} \rightarrow E = I_1 S_1 \Delta t \rightarrow E = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot (4 \cdot \pi \cdot 2^2) \cdot (2 \cdot 60) = 313{,}66 \text{ J}$$

27. Una ona es propaga per l'aire, que té una densitat de 1,29 kg/m³, de manera que triga 8 s a arribar a un punt que està a una distància *r* = 5 m del focus. Si el punt es posa a oscil·lar amb una amplitud d'1,5 cm i fa 20 oscil·lacions en 5 s, calculeu:

Expressem A en unitats del SI i amb les dades proporcionades, calculem la velocitat de fase, la freqüència.

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= 5 \text{ m} \\ \Delta t &= 8 \text{ s} \end{aligned}\right\} \quad v = \frac{r_1}{\Delta t} = \frac{5}{8} = 0{,}625 \text{ m/s}$$

$$f = \frac{20 \text{ osc.}}{5 \text{ s}} = 4 \text{ Hz}$$

$$A_1 = 1{,}5 \text{ cm} = 0{,}015 \text{ m}$$

***a*)** **La intensitat d'energia que arriba al punt.**

Apliquem l'expressió de I:

$$I_1 = 2\pi\, r^2 \rho\, v f^2 A_1 = 2\pi^2 \cdot 1{,}29 \cdot 0{,}625 \cdot 4^2 \cdot 0{,}015^2 = 5{,}73 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

***b*)** **La potència amb què el focus emet les ones.**

Per calcular la potència emesa per la font apliquem la definició de I, tenint en compte que a 5 m de la font la superfície és la d'una esfera ($s_1 = 4\pi\, r_1^2$):

$$I = \frac{E}{S\,\Delta t} \rightarrow p = \frac{E}{\Delta t} = I S = I_1 S_1 \rightarrow p = 5{,}73 \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi \cdot 5^2 = 18 \text{ W}$$

28. Determineu el nivell d'intensitat sonora a 5 m d'un altaveu sabent que la intensitat llindar, de valor 10^{-12} W/m², es dóna a una distància de 100 m.

A la distància $r_2 = 100$ m la intensitat I_2 val el valor llindar $I_0 = 10^{-12}$ W/m². Per tant, a la distància $r_1 = 5$ m:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= 100 \text{ m} \\ I_2 &= 10^{-12} \text{ W/m}^2 \\ r_1 &= 5 \text{ m} \end{aligned}\right\} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \rightarrow I_1 = I_2 \frac{r_2^2}{r_1^2} = 10^{-12} \cdot \frac{100^2}{5^2} \rightarrow I_1 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

Per tant,

$$B_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \rightarrow B_1 = 10 \log \frac{4 \cdot 10^{-10}}{10^{-12}} = 26{,}02 \text{ dB}$$