Introducció al càlcul vectorial

Qüestions

1. **Dibuixeu dos vectors equipol·lents.**

Resposta oberta.

2. **Dibuixeu dos vectors lliures iguals.**

Resposta oberta.

3. **Com són els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ que verifiquen aquestes propietats?**

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ i $a + b = c$

Els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tenen la mateixa direcció i el mateix sentit, ja que la suma dels mòduls de $\vec{a}$ i $\vec{b}$ coincideix amb el mòdul de $\vec{c}$.

b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$

El vector $\vec{b}$ ha de ser el vector nul (0 , 0), ja que, si simplifiquem, $\vec{b}$ és igual al seu oposat, i això només ho verifica el vector nul.

c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ i $a^2 + b^2 = c^2$

Els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ han de ser perpendiculars, ja que els seus mòduls verifiquen el teorema de Pitàgores.

4. **La suma dels vectors unitaris $\vec{i}$, $\vec{j}$ és un altre vector unitari? Justifiqueu la resposta fent un gràfic.**

Els vectors unitaris $\vec{i}$ i $\vec{j}$ són:

$\vec{i} = (1 , 0)$

$\vec{j} = (0 , 1)$

El vector suma és: $\vec{i} + \vec{j} = (1 , 0) + (0 , 1) = (1 , 1)$

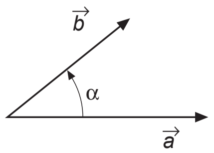
El mòdul del vector suma és $\sqrt{1^2 + 1^2} = 1{,}41$. Per tant, la suma no és un vector unitari, ja que el seu mòdul no és la unitat.

5. **Poseu dos exemples físics on s'apliqui el producte escalar de dos vectors.**

En el càlcul del treball, $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, i en el càlcul de la potència a partir de la força i la velocitat, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

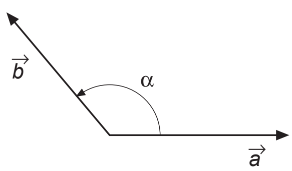
6. **Dibuixeu dos vectors tals que el producte escalar sigui: *a)* positiu, *b)* negatiu i *c)* nul.**

a)



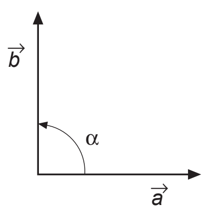
$0° < \alpha < 90°$

b)



$90° < \alpha < 180°$

c)



$\alpha = 90°$

7. **El producte escalar de dos vectors de mòduls 10 i 15 pot ser nul?**

Si aquests dos vectors són perpendiculars, el seu producte escalar és nul, ja que $\alpha = 90°$, i $\cos 90° = 0$.

8. **Quan un cos es desplaça perpendicularment respecte de la força neta que actua sobre ella, aquesta no efectua treball. Per què?**

Perquè l'angle que formen és de 90° i $\cos 90° = 0$:

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta x \cos 90° = 0$$

9. **Demostreu gràficament la propietat distributiva respecte de la suma en el producte escalar de dos vectors.**

Resposta oberta.

Problemes

1. **Expresseu els vectors següents en forma polar:**

$\vec{a} = (4\ ,\ 3)$; $\vec{b} = (3\ ,\ -2)$; $\vec{c} = (2\ ,\ -4)$

$\vec{a} = (4\ ,\ 3) \ \rightarrow\ a = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75 \ \rightarrow\ \alpha = 36{,}87°$$

$\vec{b} = (3\ ,\ -2) \ \rightarrow\ b = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = 3{,}61$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{3} = 0{,}67 \ \rightarrow\ \alpha = 33{,}69°$$

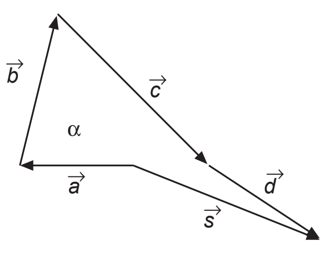
Està al 4t quadrant $\Rightarrow\ \alpha = 360° - 33{,}69° = 326{,}31°$

$\vec{c} = (2\ ,\ -4) \ \rightarrow\ c = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 4{,}47$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{2} = 2 \ \rightarrow\ \alpha = 63{,}43°$$

Està al 4t quadrant $\Rightarrow\ 360° - 63{,}43° = 296{,}57°$

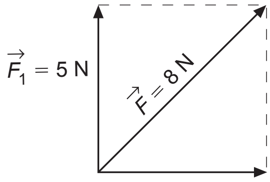
2. **Trobeu gràficament el vector suma de les forces de la figura 1.75.**



3. **Un cos està lligat a una corda i un noi tira de la corda amb una força de 150 N (fig. 1.76). Si la corda forma un angle de 30° amb el terra, quin és el valor de la força que tendeix a fer pujar el cos verticalment?**

$F_y = F \sin 30° = 150 \cdot \sin 30° = 75\ \text{N}$

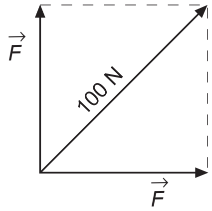
4. **La resultant de dues forces perpendiculars és 8 N. Si una d'elles és de 5 N, quant val l'altra força?**



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} = 6{,}24 \text{ N}$$

5. **Descomponeu una força de 100 N en dues forces que siguin iguals i que formin un angle recte.**



$$\left.\begin{array}{l} F_R = 100 \text{ N} \\ F_R = \sqrt{F^2 + F^2} = \sqrt{2F^2} = F\sqrt{2} \end{array}\right\} F\sqrt{2} = 100 \rightarrow F = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70{,}7 \text{ N}$$

6. **Donats dos vectors de mòduls 3 i 6 aplicats en un mateix punt, calculeu el mòdul del vector resultant quan formen un angle de:**

Apliquem el teorema del cosinus: $s^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

a) **45°**

$s^2 = 3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 45° \rightarrow s = 8{,}39$

b) **30°**

$s^2 = 3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 30° \rightarrow s = 8{,}73$

c) **90°**

$s^2 = 3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 90° \rightarrow s = 6{,}71$

7. **Considereu dos vectors, un de mòdul 3 i l'altre de mòdul 4. Digueu com s'han de sumar aquests vectors perquè el vector resultant tingui mòdul igual a: *a)* 7, *b)* 1 i *c)* 5.**

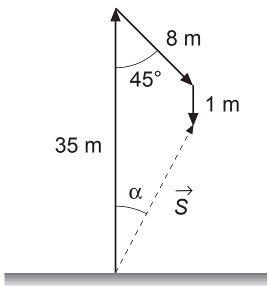
$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

a) $s = a + b = 3 + 4 = 7$

b) $s = b - a = 4 - 3 = 1$

c) $s = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

8. **Un jugador de golf ha efectuat tres cops per posar la pilota al forat. En el primer cop mou la pilota 35 m cap al nord; en el segon 8 m cap al sud-est, i el tercer 1 m cap al sud. Quin desplaçament hauria necessitat per ficar la pilota al forat en el primer cop?**



$$\left\{\begin{array}{l} \text{component } x\text{: } 8 \cdot \cos 45° = 5{,}65 \\ \text{component } y\text{: } 35 - 1 - 8 \cdot \sin 45° = 28{,}34 \end{array}\right.$$

$$s = \sqrt{5{,}65^2 + 28{,}34^2} = 28{,}90$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{28{,}34}{5{,}65} = 5{,}01 \rightarrow \alpha = 78{,}71°$$

9. **Donats els vectors en components polars $\vec{a} = 5_{30°}$, $\vec{b} = 6_{60°}$, $\vec{a} = 7_{90°}$, representeu-los gràficament i trobeu:**

***a*)** **Els vectors en components cartesians.**

$\vec{a} = 5 \cdot \cos 30° \cdot \vec{i} + 5 \cdot \sin 30° \cdot \vec{j} = 4{,}33\ \vec{i} + 2{,}5\ \vec{j}$

$\vec{b} = 6 \cdot \cos 60° \cdot \vec{i} + 6 \cdot \sin 60° \cdot \vec{j} = 3\ \vec{i} + 5{,}2\ \vec{j}$

$\vec{c} = 7 \cdot \cos 90° \cdot \vec{i} + 7 \cdot \sin 90° \cdot \vec{j} = 7\ \vec{j}$

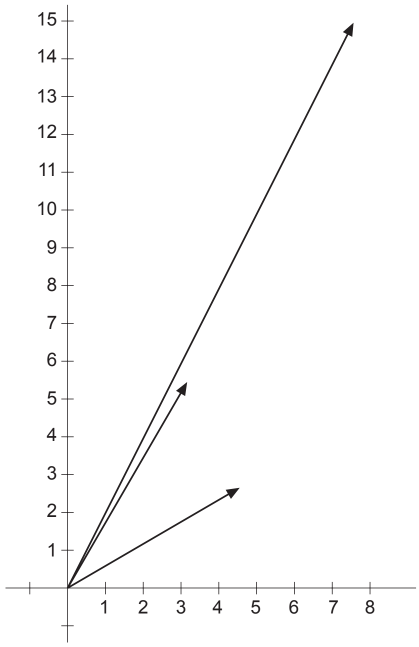
***b*)** **El vector suma dels tres vectors, gràficament i també expressat en components cartesians i polars.**

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

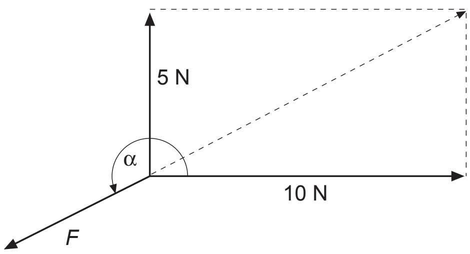
$$\begin{array}{rl} \vec{a} = & 4{,}33\ \vec{i} + 2{,}5\ \vec{j} \\ \vec{b} = & 3\ \vec{i} + 5{,}2\ \vec{j} \\ + \quad \vec{c} = & 7\ \vec{j} \\ \hline \vec{s} = & 7{,}33\ \vec{i} + 14{,}7\ \vec{j} \end{array}$$

$s = \sqrt{7{,}33^2 + 14{,}7^2} = 16{,}43$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{14{,}7}{7{,}33} = 2{,}01 \rightarrow \alpha = 63{,}5°$



10. **Sobre un cos actuen dues forces de 5 i 10 N que formen entre elles un angle de 90°. Calculeu:**



***a*)** **La força que s'ha de fer perquè el cos no es mogui.**

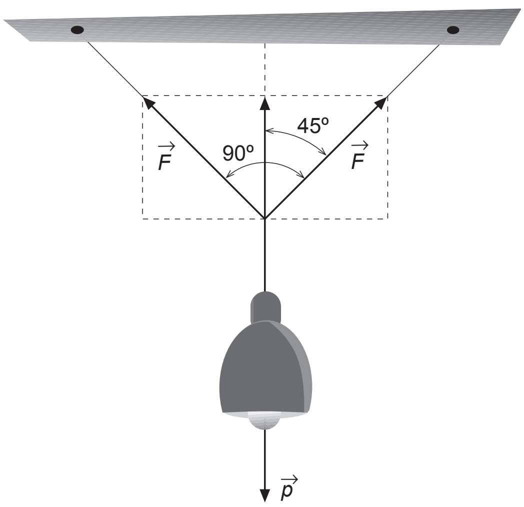
$F = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}18$ N

***b*)** **L'angle que forma amb l'horitzontal la força calculada a l'apartat *a*).**

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{5}{10} = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 26{,}56°$

Està al 3r quadrant $\Rightarrow \alpha = 180° + 26{,}56° = 206{,}56°$

11. **Un cos de 5 kg està penjat de dos cables iguals que formen un angle de 90°. Calculeu la força que ha de fer cada cable per poder sostenir el cos.**



$F \cos 45° + F \cos 45° - p = 0$

$2F \cos 45° - p = 0$

$F = \dfrac{p}{2 \cos 45°} = \dfrac{5 \cdot 9{,}8}{2 \cos 45°}$

$F = 34{,}65$ N

12. **Sabent que F_1 = 100 N i F_2 = 50 N, calculeu α perquè el cos de la figura 1.77 es mogui en la direcció de l'eix *X*.**

$$F_1 \sin\alpha = F_2 \sin(-45°) \rightarrow \sin\alpha = \frac{F_2}{F_1}\sin(-45°)$$

$$\sin\alpha = \frac{50}{100}\sin(-45°) = 0{,}35 \rightarrow \alpha = 20{,}70°$$

13. **Donats els vectors $\vec{a}$ = (2 , 4) i $\vec{b}$ = (8 , −2), calculeu:**

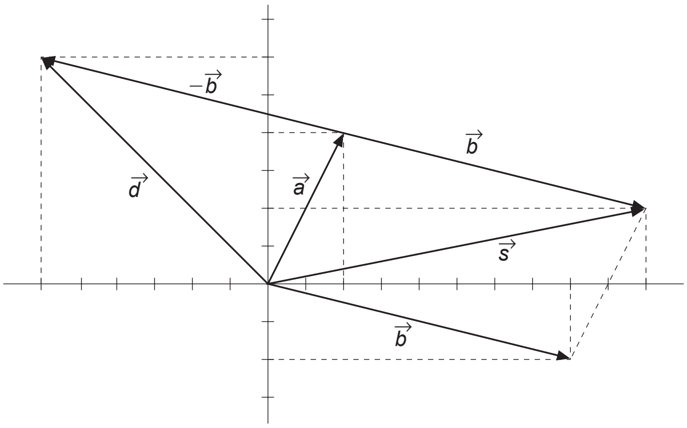
a) **La suma i la diferència, gràficament i numèricament.**

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} =$

$= (2 , 4) + (8 , -2) = (10 , 2)$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} =$

$= (2 , 4) - (8 , -2) = (-6 , 6)$



b) **Determineu els mòduls de tots dos vectors i dels vectors suma i diferència.**

$a = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 4{,}47$

$b = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68} = 8{,}25$

$s = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 10{,}20$

$d = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 8{,}49$

14. **Calculeu el producte escalar dels vectors $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, i raoneu com són aquests dos vectors.**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}\\ \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\end{array}\right\}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3 + 4\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = 6 - 4 - 2 = 0$

Els dos vectors són perpendiculars, ja que el seu producte escalar és zero.

15. **Deduïu el valor de *p* perquè els vectors $\vec{a}$ = (5 , 1 , −2) i $\vec{b}$ = (2 , *p* , 3), siguin perpendiculars.**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (5 , 1 , -2)\\ \vec{b} = (2 , p , 3)\end{array}\right\} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 2 + p + (-2)\cdot 3 = 10 + p - 6 = 0 \rightarrow p = -10 + 6 = 4$$

16. **Donats els vectors: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, calculeu $(2\vec{a} - \vec{b})\cdot(3\vec{a} + 4\vec{b})$.**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}\\ \vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}\end{array}\right\}$$

$(2\vec{a} - \vec{b})\cdot(3\vec{a} + 4\vec{b})$

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2 \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}) - (\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$3\vec{a} + 4\vec{b} = 3 \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}) + 4 \cdot (\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = 9\vec{i} + 12\vec{j} - 3\vec{k} + 4\vec{i} + 20\vec{j} - 8\vec{k} =$$
$$= 13\vec{i} + 32\vec{j} - 11\vec{k}$$

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b}) = (5\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (13\vec{i} + 32\vec{j} - 11\vec{k}) = 5 \cdot 13 + 3 \cdot 32 + 0 \cdot (-11) = 161$$

17. Calculeu els components cartesians d'un vector $\vec{u}$ que sigui unitari i que tingui la mateixa direcció que el vector $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ però sentit contrari.

$$a = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{u}_a = \frac{-3\vec{i} + 4\vec{j}}{5} = -0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$$

$$-\vec{u}_a = 0{,}6\,\vec{i} - 0{,}8\,\vec{j}$$

18. Donat el vector $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, calculeu:

a) **Un vector $\vec{b}$ que sigui perpendicular a $\vec{a}$ i que tingui un component $x = 6$.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (6\vec{i} + y\vec{j}) = 0 \rightarrow 4 \cdot 6 - 2y = 0 \rightarrow y = 12$$

$$\vec{b} = 6\vec{i} + 12\vec{j}$$

b) **Un vector unitari perpendicular al vector $\vec{a}$.**

$$b = \sqrt{6^2 + 12^2} = 13{,}42$$

$$\vec{u}_b = \frac{6}{13{,}42}\vec{i} + \frac{12}{13{,}42}\vec{j} = 0{,}45\,\vec{i} + 0{,}89\,\vec{j}$$

19. Trobeu l'angle que formen els vectors $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} &= 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a\,b\cos\alpha \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 7$$

$$a = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 4{,}24$$

$$a = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = 5{,}38$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{7}{4{,}24 \cdot 5{,}38} = 0{,}31 \Rightarrow \alpha = 72{,}13°$$

20. Donats els vectors $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, calculeu:

a) **El vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.**

$$\begin{array}{rl} & \vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \\ + & \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ \hline & \vec{c} = 7\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{array}$$

b) **Els vectors unitaris de $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.**

$$a = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$b = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3{,}74$$

$$c = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 7{,}14$$

$$\vec{u}_a = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} = 0{,}8\,\vec{i} - 0{,}6\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_b = \frac{3}{3{,}74}\vec{i} + \frac{2}{3{,}74}\vec{j} - \frac{1}{3{,}74}\vec{k} = 0{,}8\,\vec{i} + 0{,}53\,\vec{j} - 0{,}27\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_c = \frac{7}{7{,}14}\vec{i} + \frac{1}{7{,}14}\vec{j} - \frac{1}{7{,}14}\vec{k} = 0{,}98\,\vec{i} + 0{,}14\,\vec{j} - 0{,}14\,\vec{k}$$

c) **El cosinus de l'angle que formen els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 0\cdot(-1) = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b} = \frac{6}{5\cdot 3{,}74} = 0{,}32$$

21. **Donats els vectors $\vec{a} = 6\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ i $\vec{b} = -9\,\vec{i} + m\,\vec{j}$, calculeu el valor de m perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ siguin:**

a) **Perpendiculars.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6\cdot(-9) + 2\,m = 0 \;\rightarrow\; -54 + 2\,m = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{54}{2} = 27$$

b) **Paral·lels.**

$$\alpha = 0° \;\Rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos 0° = a\,b$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \\ b &= \sqrt{(-9)^2 + m^2} = \sqrt{81 + m^2} \end{aligned}\right\}$$

$$-54 + 2\,m = \sqrt{40}\cdot\sqrt{81 + m^2} \;\rightarrow\; (-54 + 2\,m)^2 = \left(\sqrt{40\cdot(81 + m^2)}\right)^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 4\,m^2 - 216\,m + 2\,916 = 3\,240 + 40\,m^2 \;\rightarrow\; 36\,m^2 + 216\,m + 324 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; m^2 + 6\,m + 9 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 9)}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

22. **Determineu la projecció del vector $\vec{a} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ sobre el vector $\vec{b} = 12\,\vec{i} - 5\,\vec{j}$.**

$$b = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$$

$$\vec{u}_b = \frac{12}{13}\vec{i} - \frac{5}{13}\vec{j}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_b = (2\,\vec{i} - 3\,\vec{j})\cdot\left(\frac{12}{13}\vec{i} - \frac{5}{13}\vec{j}\right) = 2\cdot\frac{12}{13} + (-3)\cdot\left(\frac{-5}{13}\right) = 3$$

23. **A partir de la funció vectorial $\vec{a}(t) = 2\,t\,\vec{i} + (2\,t^2 - 1)\,\vec{j}$, calculeu l'angle que formen els vectors obtinguts en fer $t = 1$ i $t = 3$.**

$$\vec{a}(t) = 2\,t\,\vec{i} + (2\,t^2 - 1)\,\vec{j}$$

$$\vec{a}(1) = 2\cdot 1\,\vec{i} + (2\cdot 1 - 1)\,\vec{j} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{a}(3) = 2\cdot 3\,\vec{i} + (2\cdot 3^2 - 1)\,\vec{j} = 6\,\vec{i} + 17\,\vec{j}$$

$\vec{a}(1) \cdot \vec{a}(3) = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 17 = 29$

$a(1) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$

$a(3) = \sqrt{6^2 + 17^2} = \sqrt{325} = 18{,}03$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}(1) \cdot \vec{a}(3)}{a(1) \cdot a(3)} = \frac{29}{2{,}24 \cdot 18{,}03} = 0{,}71 \rightarrow \alpha = 44°$$

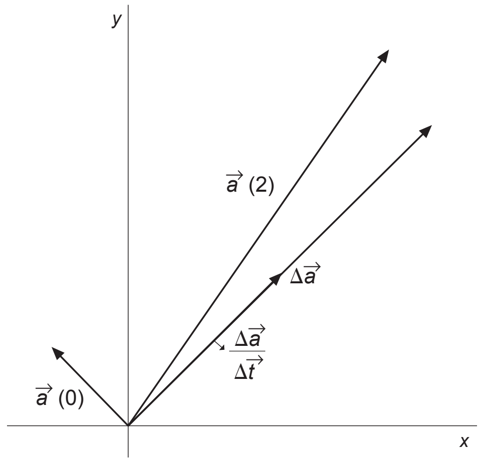
24. Donada la funció vectorial $\vec{a}(t) = (t^2 - 1)\,\vec{i} + (2t + 1)\,\vec{j}$, calculeu i representeu gràficament els vectors següents:

a) $\vec{\mathbf{a}}(\mathbf{0}) = -\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{\mathbf{a}}(\mathbf{2}) = (2^2 - 1)\,\vec{i} + (2 \cdot 2 + 1)\,\vec{j} = 3\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$

c) $\boldsymbol{\Delta \vec{a} = \vec{a}(2) - \vec{a}(0)} = (3\,\vec{i} + 5\,\vec{j}) - (-\vec{i} + \vec{j}) = 4\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$

d) $\dfrac{\boldsymbol{\Delta \vec{a}}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \dfrac{4\,\vec{i} + 4\,\vec{j}}{2 - 0} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$



25. Tenim la funció vectorial $\vec{a}(t) = (t^2 - 3)\,\vec{i} + (2t^2 + t)\,\vec{j}$, determineu el vector unitari que té la direcció i el sentit de la derivada per a $t = 1$.

$\vec{a}(t) = (t^2 - 3)\,\vec{i} + (2t^2 + t)\,\vec{j}$

$\vec{a}\,'(t) = 2t\,\vec{i} + (4t + 1)\,\vec{j}$

$\vec{a}\,'(1) = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$

$\vec{a}\,'(1) = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5{,}38$

$$\vec{u}_{a'(1)} = \frac{2}{5{,}38}\,\vec{i} + \frac{5}{5{,}38}\,\vec{j} = 0{,}37\,\vec{i} + 0{,}93\,\vec{j}$$

26. Donada la funció vectorial $\vec{a}(t) = t^2\,\vec{i} + (3 - t)\,\vec{j}$, calculeu per a $t = 3$:

a) **$\vec{a}$ i el seu mòdul.**

$\vec{a}(3) = 3^2\,\vec{i} + (3 - 3)\,\vec{j} = 9\,\vec{i}$

$a(3) = 9$

b) **El mòdul de la derivada respecte de *t*.**

$\vec{a}\,'(t) = 2t\,\vec{i} - \vec{j}$

$a'(t) = \sqrt{(2t)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4t^2 + 1}$

$a'(3) = \sqrt{4 \cdot 3^2 + 1} = \sqrt{37} = 6{,}08$

c) **La derivada del mòdul.**

$a(t) = \sqrt{(t^2)^2 + (3 - t)^2} = \sqrt{t^4 + (3 - t)^2} = \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}$

$$a'(t) = \frac{4t^3 + 2t - 6}{2\sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}}$$

$$a'(3) = \frac{4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6}{2 \cdot \sqrt{3^4 + 3^2 - 6 \cdot 3 + 9}} = \frac{108}{2 \cdot \sqrt{81}} = 6$$

27. **Donat el vector $\vec{a}(t) = t\,\vec{i} + (t^2 - 4)\,\vec{j}$, determineu:**

a) **$\vec{a}(2)$, $\vec{a}(5)$.**

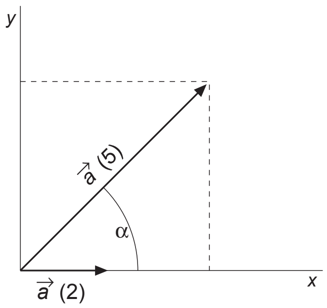
$\vec{a}(2) = 2\,\vec{i} + (2^2 - 4)\,\vec{j} = 2\,\vec{i} = (2\,,0)$

$\vec{a}(5) = 5\,\vec{i} + (5^2 - 4)\,\vec{j} = 5\,\vec{i} + 21\,\vec{j} = (5\,,21)$

b) **$\Delta\vec{a}$ en els instants anteriors.**

$\Delta\vec{a} = \vec{a}(5) - \vec{a}(2) = (5\,,21) - (2\,,0) = (3\,,21)$

c) **L'angle que ha girat el vector $\vec{a}$.**



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{21}{5} = 4{,}2 \Rightarrow \alpha = 76{,}6°$$

28. **Sigui la funció vectorial $\vec{a}(t) = ((t^2 - 1)\,,5\,t)$, calculeu-ne la integral entre $t = 1$ s i $t = 10$ s.**

$\vec{a}(t) = ((t^2 - 1)\,,5\,t)$

$$\int \vec{a}(t)\,dt = \int_1^{10} \big((t^2 - 1)\,,5t\big)\,dt \;\rightarrow$$

$$\left[\frac{t^3}{3} - t\,,\frac{5\,t^2}{2}\right]_1^{10} = \left(\frac{10^3}{3} - 10 - \frac{1}{3} + 1\,,\frac{5\cdot 10^2}{2} - \frac{5\cdot 1}{2}\right) = (324\,,247{,}5)$$